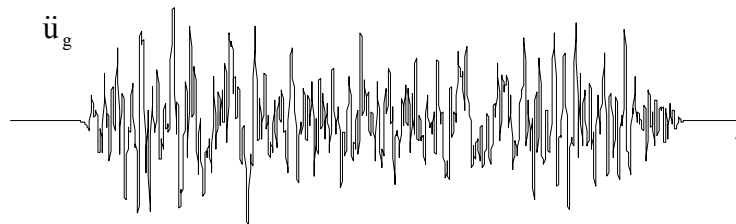
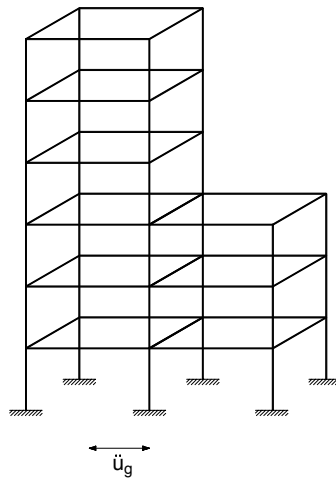

ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΥΠΟ ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ ΜΕ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ευάγγελου Ε. Πλεύρη



Επιβλέπων:

Μανόλης Παπαδρακάκης, Καθηγητής

Αθήνα, Ιούλιος 1999

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	iii
Ευχαριστίες	vi

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ

1.1	Εισαγωγή	1
1.2	Μαθηματικό μοντέλο βελτιστοποίησης	3
1.2.1	Μεταβλητές σχεδιασμού	4
1.2.2	Συναρτήσεις περιορισμών	6
1.2.3	Αντικειμενική συνάρτηση	9
1.3	Κατηγορίες βελτιστοποίησης κατασκευών	11
1.3.1	Βελτιστοποίηση τοπολογίας κατασκευών	12
1.3.2	Βελτιστοποίηση σχήματος κατασκευών	13
1.3.3	Βελτιστοποίηση των μεγεθών των διατομών	14
1.4	Μέθοδοι βέλτιστου σχεδιασμού	15
1.4.1	Μαθηματικές μέθοδοι βελτιστοποίησης	15
1.4.2	Εξελικτικές μέθοδοι βελτιστοποίησης	17

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ

2.1	Δαρβίνεια θεωρία για την εξέλιξη των ειδών	20
2.2	Εισαγωγή στη βελτιστοποίηση με Στρατηγικές Εξέλιξης	22
2.3	Γεννήτριες τυχαίων αριθμών	24
2.4	Στρατηγικές Εξέλιξης δύο μελών (2-ES)	26
2.4.1	Προσαρμογή του μήκους βήματος	31
2.4.2	Κριτήρια τερματισμού	32
2.5	Στρατηγικές Εξέλιξης πολλών μελών (M-ES)	34
2.5.1	Τελεστής ανασυνδυασμού	36
2.5.2	Αυτοπροσαρμογή των παραμέτρων	38
2.5.3	Κριτήρια τερματισμού	38

2.6	Στρατηγικές Εξέλιξης και διακριτός βέλτιστος σχεδιασμός	38
2.6.1	Τελεστής μετάλλαξης	39
2.6.2	Τελεστής ανασυνδυασμού	41
2.6.3	Κριτήρια τερματισμού	42
2.7	Διαχείριση των περιορισμών	42
2.8	Εφαρμογή των ES στη βελτιστοποίηση κατασκευών	43

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

3.1	Δυναμικά φορτία	45
3.2	Μονοβάθμιο σύστημα	46
3.2.1	Ελεύθερη ταλάντωση χωρίς απόσβεση	48
3.2.2	Εξαναγκασμένη ταλάντωση χωρίς απόσβεση	49
3.2.3	Ελεύθερη ταλάντωση με απόσβεση	49
3.2.4	Κίνηση του εδάφους	51
3.3	Πολυβάθμιο σύστημα	53
3.3.1	Ελαστικές δυνάμεις – Μητρώο δυσκαμψίας	53
3.3.2	Αδρανειακές δυνάμεις – Μητρώο μάζας	54
3.3.3	Δυνάμεις απόσβεσης – Μητρώο απόσβεσης	56
3.3.4	Μητρωική διαφορική εξίσωση κίνησης	56
3.3.5	Ελεύθερη ταλάντωση χωρίς απόσβεση - Ιδιομορφές	57
3.3.6	Ορθογωνικότητα των ιδιομορφών	60
3.3.7	Κανονικοποίηση των ιδιομορφών	61
3.3.8	Ελεύθερη ταλάντωση με απόσβεση	61
3.3.9	Εξαναγκασμένη ταλάντωση χωρίς απόσβεση	64
3.3.10	Εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση	65
3.4	Απόσβεση	66
3.5	Σύνοψη και σχόλια περί της μεθόδου των ιδιομορφών	72

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΜΕΣΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

4.1	Εισαγωγή	74
4.2	Βασικές αρχές των μεθόδων άμεσης ολοκλήρωσης	75
4.3	Μέθοδος των κεντρικών διαφορών	77
4.4	Μέθοδος Newmark	80

4.5	Άλλες μέθοδοι	83
4.5.1	Η μέθοδος Houbolt	83
4.5.2	Η Wilson θ μέθοδος	83
4.6	Ευστάθεια των μεθόδων	84
4.5	Ακρίβεια των μεθόδων	85

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

5.1	Γενικά στοιχεία	87
5.2	Φορέας	88
5.3	Στοιχεία που αφορούν τη βελτιστοποίηση	90
5.3.1	Μεταβλητές σχεδιασμού	90
5.3.2	Αντικειμενική συνάρτηση	91
5.3.3	Περιορισμοί	91
5.4	Φάσμα σχεδιασμού	92
5.5	Μέθοδος της άμεσης ολοκλήρωσης	95
5.5.1	Παραγωγή τεχνητών επιταχυνσιογραφημάτων	95
5.6	Μέθοδος των ιδιομορφών	101
5.7	Αποτελέσματα των αναλύσεων	104
5.7.1	Διερεύνηση των κριτηρίων τερματισμού	105
5.7.2	Διερεύνηση των σχημάτων $(\mu+\lambda)ES$ και $(\mu, \lambda)ES$	107
5.7.3	Διερεύνηση της επιρροής του αριθμού γονέων και απογόνων	110
5.7.4	Διερεύνηση της επιρροής του αρχικού σημείου αναζήτησης	112
5.7.5	Συμπεράσματα για τις αναλύσεις βελτιστοποίησης	114
5.7.6	Σύγκριση των δυο μεθόδων δυναμικής ανάλυσης	115

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον κ. Μανόλη Παπαδρακάκη, Καθηγητή, επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε αναθέτοντάς μου το έργο αυτό, για την πολύτιμη καθοδήγησή του καθώς και για τις σπουδαίες γνώσεις και εμπειρίες που αποκόμισα από τη συνεργασία μαζί του κατά τη διάρκεια του τελευταίου εξαμήνου των σπουδών μου στο τμήμα Πολιτικών Μηχανικών του ΕΜΠ.

Ένα πολύ μεγάλο ευχαριστώ οφείλω επίσης στον Νίκο Λαγαρό, υποψήφιο διδάκτορα και πάνω απ' όλα φίλο για το ενδιαφέρον και τις καθοριστικές υποδείξεις του καθ' όλη τη διάρκεια του εξαμήνου, σε ό,τι αφορούσε τη διπλωματική αυτή εργασία. Με την ερευνητική του δραστηριότητα, ο Νίκος προλείανε κατάλληλα το έδαφος, κάνοντας εφικτή σε εμάς τους νεώτερους τη διείσδυση σε τόσο βαθιά ερευνητικά θέματα, στα πλαίσια της ευρύτερης συνεργασίας. Η εκπόνηση της παρούσας εργασίας στο επίπεδο αυτό, θα ήταν πραγματικά αδύνατη χωρίς τη συμβολή του.

Ευχαριστώ, τέλος, τον κ. Χάρη Μουζάκη για τη βοήθεια και τις επεξηγήσεις του σε θέματα δυναμικής των κατασκευών και ερμηνείας του Νέου Ελληνικού Αντισεισμικού Κανονισμού.

Βαγγέλης Πλεύρης,

22 Ιουλίου 1999

1

Βέλτιστος σχεδιασμός

1.1 Εισαγωγή

Καθ' όλη τη διάρκεια της παρουσίας του στη γη, ο άνθρωπος χρειάστηκε να δημιουργήσει διάφορες κατασκευές, προκειμένου να καλύψει τις συνεχώς αυξανόμενες ανάγκες του. Ως “κατασκευή”, βλέποντάς την από τη σκοπιά της Μηχανικής των Κατασκευών, ορίζεται εκείνη η διευθέτηση των υλικών που εξυπηρετεί στην ανάληψη μηχανικών φορτίων. Η λέξη “εξυπηρετεί” στον παραπάνω ορισμό, έχει την έννοια της αντοχής και της λειτουργικότητας. Ο ορισμός αυτός είναι ιδιαίτερα γενικός, συμπεριλαμβάνει δε όλα τα γνωστά μας ήδη κατασκευών, όπως κτίρια, γέφυρες, αεροσκάφη, σκελετούς ζώντων οργανισμών και φυτών κ.α. Ο όρος “διευθέτηση των υλικών”, υπονοεί ότι στο εξής δεν υφίσταται διαχωρισμός των υλικών από τη μία και των κατασκευών από την άλλη, καθώς τα ίδια τα υλικά, διευθετημένα κατά τον κατάλληλο τρόπο (σχεδιασμός), αποτελούν την κατασκευή στο σύνολό της.

Οι βασικές απαιτήσεις που τίθενται γενικά για μία κατασκευή, είναι αυτές της αντοχής και της λειτουργικότητας. Σκοπός του μηχανικού, ήταν ανέκαθεν η αυστηρή τήρηση των παραπάνω περιορισμών, σε συνδυασμό όμως με την ικανοποίηση – κατά το δυνατό – και άλλων, κυρίως οικονομικής φύσεως απαιτήσεων με τελικό στόχο τη μέγιστη δυνατή απόδοση του έργου. Έτσι, ο βέλτιστος σχεδιασμός, είναι το αντικείμενο έρευνας κάθε μηχανικού ο οποίος στοχεύει στη σχεδίαση ενός μηχανήματος, ενός εξαρτήματος ή ενός κτιρίου το οποίο καλείται να εξυπηρετήσει κάποιες λειτουργικές ανάγκες. Βέλτιστος ονομάζεται ένας σχεδιασμός ο οποίος ικανοποιεί τις κατασκευαστικές προδιαγραφές και τις

λειτουργικές απαιτήσεις, ενώ ταυτόχρονα ελαχιστοποιεί συγκεκριμένα κριτήρια, όπως είναι το κόστος και το βάρος της κατασκευής. Ως βελτιστοποίηση κατασκευών, μπορεί να οριστεί η λογική διαδικασία διερεύνησης κάποιου σχεδιασμού ο οποίος να υπερτερεί από κάθε άλλη λύση μέσα σε ένα πλαίσιο αντικειμενικών, γεωμετρικών και χαρακτηριστικών περιορισμών.

Η εφαρμογή της βελτιστοποίησης, αν και πάντα φάνταζε ως η ιδανική λύση στο μυαλό του μηχανικού, ήταν μέχρι πριν από λίγα χρόνια δύσκολη έως αδύνατη, λόγω της ανυπαρξίας μεθόδων που θα βοηθούσαν στην υλοποίηση του δύσκολου αυτού στόχου. Έτσι, παραδοσιακά ο σχεδιασμός μιας κατασκευής βασιζόταν στην εμπειρία του μηχανικού – σχεδιαστή και σε παραμετρικές διερευνήσεις “δοκιμής και διόρθωσης” (trial and error).

Πολλοί ερευνητές, έχουν καταπιαστεί κατά καιρούς με το πρόβλημα του βέλτιστου σχεδιασμού. Κατά τον 16ο αιώνα, ο Leonardo da Vinci και ο Γαλιλαίος ερεύνησαν το πρόβλημα της βελτιστοποίησης κατασκευών χρησιμοποιώντας μοντέλα αλλά και πραγματικές κατασκευές σε κλίμακα 1:1. Κατά τον 17ο και 18ο αιώνα, ερευνητές όπως ο Νεύτωνας, ο Lagrange και ο Euler παρήγαγαν βέλτιστους σχεδιασμούς χρησιμοποιώντας αριθμητικές μεθόδους βασισμένες σε ένα κριτήριο βελτιστοποίησης το οποίο απαιτούσε η αντοχή να είναι κατά το δυνατόν ομοιόμορφα κατανεμημένη σε όλα τα μέρη της κατασκευής. Ο Maxwell στα τέλη του 19ου και ο Michell στις αρχές του 20ου αιώνα πραγματοποίησαν τις πρώτες αναλυτικές διαδικασίες στη βελτιστοποίηση κατασκευών, με στόχο την ελαχιστοποίηση του βάρους της κατασκευής. Για πρώτη φορά ο Schmidt (1960) έκανε μία περιεκτική παρουσίαση της χρήσης μαθηματικά προγραμματιζόμενων τεχνικών για την επίλυση μη γραμμικών – ανισοτικών προβλημάτων με περιορισμούς, για τον σχεδιασμό ελαστικών κατασκευών υπό την επίδραση πολλαπλών φορτίσεων. Από τότε πολλές μέθοδοι και τεχνικές έχουν αναπτυχθεί από διάφορους ερευνητές για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης.

Η ανάγκη επίτευξης όλο και οικονομικότερων σχεδιασμών σε συνδυασμό με την αύξηση της πολυπλοκότητας αλλά και του μεγέθους των προβλημάτων οδήγησε στην αναζήτηση αυτοματοποιημένων μεθόδων σχεδιασμού με την υιοθέτηση και εφαρμογή γενικών αλγορίθμων βελτιστοποίησης και την αξιοποίηση των εξελίξεων στην ακμάζουσα τα τελευταία χρόνια τεχνολογία των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Έτσι, σήμερα πλέον, ο μηχανικός έχει στη διάθεσή του μία πληθώρα μεθόδων και εργαλείων για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης, ενώ παράλληλα η έρευνα πάνω στο αντικείμενο συνεχίζει να ευδοκimeί. Με τον τρέχοντα ρυθμό δε της εξέλιξης στις επιδόσεις των ηλεκτρονικών υπολογιστών, διαφαίνεται ξεκάθαρα ότι στο άμεσο μέλλον η αντιμετώπιση και η επίλυση

των δύσκολων υπολογιστικά προβλημάτων βελτιστοποίησης θα είναι υπόθεση ρουτίνας για τον μηχανικό.

Η βελτιστοποίηση διαφέρει σημαντικά από την ανάλυση. Η ανάλυση αποσκοπεί στην εύρεση της απόκρισης της κατασκευής για μία και μόνο επιλογή των χαρακτηριστικών της μεγεθών και υπό το καθεστώς των φορτίων που την καταπονούν, ενώ αντιθέτως κατά τη βελτιστοποίηση δοκιμάζονται πολλές χαρακτηριστικές προσομοιώσεις της κατασκευής έτσι ώστε να προκύψει η γεωμετρία εκείνη για την οποία τηρούνται μεν οι κατασκευαστικές απαιτήσεις, ελαχιστοποιείται δε η τιμή κάποιου χαρακτηριστικού και κρίσιμου μεγέθους – συνηθέστερα του βάρους της κατασκευής.

Στόχος του σχεδιαστή – μηχανικού κατά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης, είναι η εξεύρεση ενός συνδυασμού ανεξάρτητων μεταβλητών που λαμβάνουν πραγματικές ή ακέραιες τιμές και ονομάζονται *παράμετροι ή μεταβλητές σχεδιασμού* (design variables), έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί (ή να μεγιστοποιηθεί) η *αντικειμενική συνάρτηση* του προβλήματος (objective function). Τα προβλήματα βελτιστοποίησης στην επιστημονική περιοχή της υπολογιστικής μηχανικής, συνήθως υπόκεινται σε *περιορισμούς*, όπως είναι το εύρος μέσα στο οποίο κινούνται οι παράμετροι σχεδιασμού (move limits) το οποίο καθορίζει το χώρο αναζήτησης, αλλά και άλλες *συναρτήσεις περιορισμών* (constraint functions), όπως λόγου χάρη τάσεων και παραμορφώσεων, οι οποίες καθορίζουν τον χώρο των αποδεκτών λύσεων του προβλήματος.

1.2 Μαθηματικό μοντέλο βελτιστοποίησης

Τα προβλήματα βέλτιστου σχεδιασμού κατασκευών χαρακτηρίζονται από μία ευρεία γκάμα τύπων αντικειμενικής συνάρτησης και συναρτήσεων περιορισμών, οι οποίες συνήθως είναι έμμεσες ή πεπλεγμένες μη γραμμικές συναρτήσεις, μεγάλου βαθμού μη γραμμικότητας ως προς τις παραμέτρους σχεδιασμού. Αυτές οι συναρτήσεις είναι συνήθως ασυνεχείς και μη κυρτές (non-convex) με αποτέλεσμα τα προβλήματα αυτά να εμφανίζουν συχνότατα πολλά τοπικά ελάχιστα. Λόγω των εγγενών δυσχερειών των προβλημάτων αυτών, ακόμα και η εύρεση ενός τοπικού ελαχίστου δεν αποτελεί εύκολη υπόθεση για τους αλγόριθμους βελτιστοποίησης. Η σωστή μαθηματική διατύπωση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης αποτελεί ίσως το πιο σημαντικό και κρίσιμο βήμα για την εύρεση του βέλτιστου σχεδιασμού.

Γενικά, παρόλο που το είδος των παραμέτρων σχεδιασμού, της αντικειμενικής συνάρτησης και των συναρτήσεων περιορισμού μπορεί να διαφέρει σημαντικά, η μαθηματική διατύπωση των προβλημάτων αυτής της κατηγορίας μπορεί να γίνει με έναν ενιαίο και κομψό τρόπο. Η γενική μαθηματική διατύπωση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης με τη μορφή ενός προβλήματος μη γραμμικού προγραμματισμού (Non Linear Programming – NLP) είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned}
 F(\vec{s}) &\rightarrow \min, \quad \vec{s} = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}^T \\
 l_i &\leq s_i \leq u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\
 g_j(\vec{s}) &\leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \\
 h_k(\vec{s}) &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, t
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

, όπου $\vec{s}$ είναι το διάνυσμα των n μεταβλητών (παραμέτρων) σχεδιασμού, $F(\vec{s})$ είναι η αντικειμενική συνάρτηση της οποίας αναζητούμε την ελάχιστη (ή τη μέγιστη) τιμή, l_i και u_i είναι αντίστοιχα το κάτω (lower) και το άνω (upper) όριο της μεταβλητής σχεδιασμού i και $g_j(\vec{s})$, $h_k(\vec{s})$ είναι οι συναρτήσεις περιορισμών ανισοτήτων (m το πλήθος) και ισοτήτων (t το πλήθος), αντίστοιχα.

1.2.1 Μεταβλητές σχεδιασμού

Οι παράμετροι εκείνες οι οποίες όταν λάβουν συγκεκριμένη τιμή καθορίζουν πλήρως έναν σχεδιασμό, ονομάζονται μεταβλητές σχεδιασμού. Οι μεταβλητές σχεδιασμού ενδέχεται να είναι είτε συνεχείς, είτε διακριτές οπότε επιτρέπεται να λάβουν συγκεκριμένες και μόνον τιμές. Στη δεύτερη περίπτωση, η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος της βελτιστοποίησης διαφοροποιείται αμυδρά, καθώς απαιτείται να συμπεριληφθεί ο επιπλέον περιορισμός:

$$s_i \in R_i^d, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{1.2}$$

, όπου R_i^d είναι το διακριτό πεδίο τιμών της μεταβλητής σχεδιασμού s_i . Η χρησιμοποίηση διακριτών τιμών είναι πολύ συχνή στον βέλτιστο σχεδιασμό κατασκευών κυρίως ραβδωτών

φορέων όπου οι διατομές που διατίθενται στο εμπόριο είναι τυποποιημένες και έχουν συγκεκριμένες προδιαγραφές.

Η επιλογή των παραμέτρων σχεδιασμού με τις οποίες περιγράφονται διαστάσεις διατομών, σταθερές υλικών, παράμετροι σχήματος και τοπολογίας, είναι πολύ σημαντική για την αποτελεσματικότητα των μεθόδων βελτιστοποίησης. Ο μηχανικός με την επιλογή των παραμέτρων σχεδιασμού καθορίζει εκ των προτέρων σε ποια τμήματα της κατασκευής θα γίνουν βελτιωτικές παρεμβάσεις και με ποιόν τρόπο θα πραγματοποιηθούν οι μετατροπές στα τμήματα αυτά κατά τη διάρκεια της διαδικασίας βελτιστοποίησης.

Μία συνηθισμένη τεχνική που χρησιμοποιείται για προβλήματα με μεγάλο πλήθος παραμέτρων σχεδιασμού είναι η ομαδοποίησή τους. Με αυτόν τον τρόπο αντιμετωπίζονται αφενός κατασκευαστικές απαιτήσεις (συμμετρία, ταχύτητα και ευκολία κατασκευής), μειώνονται δε αφετέρου οι διαστάσεις του προβλήματος άρα και το υπολογιστικό κόστος και ο χρόνος που απαιτείται για την επίλυσή του, χωρίς την απώλεια σημαντικών πληροφοριών.

Οι μεταβλητές σχεδιασμού πολλές φορές διακρίνονται σε κύριες (primary) και δευτερεύουσες (secondary), ανάλογα με τη σπουδαιότητά τους. Συνήθως οι δευτερεύουσες παράμετροι σχεδιασμού συνδέονται με τις κύριες μέσω γραμμικών σχέσεων (design variable linking).

Σε κάποιες περιπτώσεις, είναι επιθυμητό να επιλέγεται μεγαλύτερο πλήθος μεταβλητών σχεδιασμού από ότι είναι απαραίτητο για τη σωστή μοντελοποίηση της κατασκευής. Με αυτόν τον τρόπο, προστίθενται επιπλέον “βαθμοί ελευθερίας” στο μοντέλο και προσδίδεται μεγαλύτερη “ευελιξία” στη διαδικασία εξεύρεσης της βέλτιστης λύσης. Σε επόμενα βήματα είναι δυνατό να εξαλειφθούν οι επιπλέον μεταβλητές σχεδιασμού αναθέτοντας σε αυτές συγκεκριμένες τιμές για τη συνέχεια της διαδικασίας βελτιστοποίησης.

Η ανεξαρτησία μεταξύ των μεταβλητών σχεδιασμού είναι ένα επίσης σημαντικό θέμα που πρέπει να προσεχθεί ιδιαίτερα κατά την επιλογή τους. Είναι πιθανό αν δεν ληφθεί η απαραίτητη μέριμνα, να επιλεγούν μεταβλητές σχεδιασμού εξαρτημένες η μία από την άλλη, με αποτέλεσμα το μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος να γίνει ιδιαίτερα πολύπλοκο.

1.2.2 Συναρτήσεις περιορισμών

Σχεδιασμός μιας κατασκευής ονομάζεται ένα πλήρως ορισμένο σύστημα, δηλαδή ένα σύστημα του οποίου οι μεταβλητές σχεδιασμού έχουν λάβει συγκεκριμένες τιμές. Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, ως σχεδιασμός μπορεί να θεωρηθεί και ένα αυθαίρετα ορισμένο ή ακόμη και ένα φανταστικό σύστημα, όπως λόγου χάρη μια κατασκευή της οποίας κάποια μέλη έχουν αρνητικό εμβαδόν ή κάποιες κυκλικές διατομές έχουν αρνητική ακτίνα.

Κάθε απαίτηση του σχεδιαστή – μηχανικού εισάγεται στο μαθηματικό μοντέλο βελτιστοποίησης με τη μορφή ανισοτήτων και ισοτήτων οι οποίες ονομάζονται *περιορισμοί*. Κάθε τέτοια παράσταση πρέπει να είναι εξαρτώμενη τουλάχιστον από μία μεταβλητή σχεδιασμού του προβλήματος, καθώς μόνον τότε έχει νόημα η ύπαρξή της στο μαθηματικό μοντέλο. Στην περίπτωση που ένας σχεδιασμός, δηλαδή μια συγκεκριμένη τιμή των μεταβλητών σχεδιασμού δεν πληρεί κάποιον ή κάποιους από τους περιορισμούς του προβλήματος τότε ονομάζεται *ανέφικτος* (infeasible), ενώ σε αντίθετη περίπτωση - όταν δηλαδή πληρούνται όλοι ανεξαιρέτως οι περιορισμοί - ονομάζεται *εφικτός* (feasible). Ένας εφικτός σχεδιασμός δεν είναι φυσικά πάντοτε βέλτιστος, είναι όμως σίγουρα υλοποιήσιμος.

Οι περιορισμοί που επιβάλλονται σε προβλήματα κατασκευών χρησιμεύουν γενικά για την επιβολή των απαιτήσεων ασφαλείας, λειτουργικότητας αλλά και κατασκευαστικών πολλές φορές απαιτήσεων και περιορίζουν τελικά σημαντικά τον χώρο των αποδεκτών λύσεων. Οι συναρτήσεις περιορισμών αφορούν δε συνήθως τάσεις και μετατοπίσεις, οι οποίες τις περισσότερες φορές δεν πρέπει να υπερβαίνουν κάποια άνω όρια. Οι περιορισμοί αυτοί, σπάνια (μόνο σε πολύ απλές εφαρμογές) μπορούν να εκφραστούν αναλυτικά ως συναρτήσεις των μεταβλητών σχεδιασμού του προβλήματος όπως στο μαθηματικό μοντέλο που περιγράφηκε παραπάνω. Συνηθέστερα, πραγματοποιείται για κάθε συγκεκριμένο σχεδιασμό και υπό τα φορτία σχεδιασμού επίλυση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, από τα αποτελέσματα της οποίας ελέγχονται οι περιορισμοί του προβλήματος.

Λόγω της ομαδοποίησης κάποιων παραμέτρων σχεδιασμού, μπορούν να ομαδοποιηθούν αντίστοιχα και κάποιες από τις συναρτήσεις περιορισμών. Για παράδειγμα αν έχει γίνει ομαδοποίηση n μελών της κατασκευής, τότε οι n περιορισμοί που αφορούν λόγου χάρη την τάση κάθε μέλους της ομάδας αυτής, ανάγονται τελικά σε έναν και μόνο περιορισμό που αφορά όλα τα μέλη της ομάδας.

Συχνά γίνεται αναφορά σε ενεργές και ανενεργές συναρτήσεις περιορισμών. Μία ανισοτική συνάρτηση περιορισμού $g_j(\vec{s}) \leq 0$ καλείται *ενεργή* (active) σε ένα σημείο $\vec{s}^*$ στην περίπτωση που ικανοποιείται ως ισότητα, δηλαδή $g_j(\vec{s}^*) = 0$ και *ανενεργή* (inactive) στην περίπτωση που ικανοποιείται αυστηρώς ως ανισότητα, δηλαδή $g_j(\vec{s}^*) < 0$. Η ανωτέρω ανισοτική συνάρτηση περιορισμού θεωρείται ότι παραβιάζεται για τον σχεδιασμό $\vec{s}^*$ στην περίπτωση που λαμβάνει θετική τιμή, δηλαδή $g_j(\vec{s}^*) > 0$. Αντίστοιχα μία ισοτική συνάρτηση περιορισμών $h_k(\vec{s}^*) = 0$ θεωρείται ότι παραβιάζεται στο σημείο $\vec{s}^*$ αν δεν ισχύει η ισότητα, δηλαδή $h_k(\vec{s}^*) \neq 0$. Συνεπώς μία ανισοτική συνάρτηση περιορισμού μπορεί να είναι ενεργή, ανενεργή ή να παραβιάζεται, ενώ μία ισοτική συνάρτηση περιορισμού ενδέχεται να είναι είτε ενεργή, είτε να παραβιάζεται. Επομένως, καθίσταται σαφές ότι κάθε εφικτός σχεδιασμός ορίζεται από ενεργές ή ανενεργές ανισοτικές συναρτήσεις περιορισμών καθώς και από ενεργές ισοτικές συναρτήσεις περιορισμών.

Συμβαίνει καμιά φορά ο σχεδιαστής, είτε για λόγους αβεβαιότητας είτε λόγω απειρίας να επιβάλλει επιπλέον συναρτήσεις περιορισμών οι οποίες ενδέχεται να είναι άχρηστες, αφού είτε είναι εξαρτημένες από άλλες, είτε εμφανίζονται πάντα στην ασφαλή περιοχή (μονίμως ανενεργές). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη χωρίς κανένα όφελος διόγκωση των υπολογισμών ιδίως για την περίπτωση των μεθόδων μαθηματικού προγραμματισμού στις οποίες απαιτείται η χρονοβόρα διαδικασία της ανάλυσης ευαισθησίας.

Γενικά σε κάθε βήμα της διαδικασίας βελτιστοποίησης είναι απίθανο να επηρεάζουν την εύρεση ενός καλύτερου σχεδιασμού όλες οι συναρτήσεις περιορισμών, δηλαδή να είναι όλες οι συναρτήσεις περιορισμών ενεργές. Βέβαια ο σχεδιαστής δεν έχει τη δυνατότητα να γνωρίζει εκ των προτέρων ποιες από τις συναρτήσεις περιορισμών είναι απαραίτητες σε κάθε βήμα του βέλτιστου σχεδιασμού (ενεργές) και ποιες όχι (ανενεργές) για την εύρεση της βέλτιστης λύσης. Γι' αυτόν τον λόγο, κατά την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης είναι απαραίτητη η χρησιμοποίηση διαφόρων τεχνικών αποτελεσματικότερης αντιμετώπισης των περιορισμών, οι οποίες βελτιώνουν κατά πολύ την απόδοση των μεθόδων βελτιστοποίησης και μειώνουν σημαντικά τον χρόνο των υπολογισμών, ειδικά όταν το πρόβλημα είναι σχετικά μεγάλο δηλαδή με πολλές μεταβλητές σχεδιασμού και συναρτήσεις περιορισμών. Σε αυτήν την περίπτωση προκειμένου να μειωθούν οι υπολογισμοί των τιμών των συναρτήσεων περιορισμών και των παραγώγων τους, σε κάθε βήμα εντοπίζονται οι συναρτήσεις περιορισμών που είναι εντός της ασφαλούς περιοχής, είναι δηλαδή ανενεργές, οπότε δεν

επηρεάζουν στην τρέχουσα φάση τη διαδικασία εύρεσης ενός βελτιωμένου σχεδιασμού και επομένως μπορούν προς στιγμήν να παραλειφθούν.

Μία ενεργή συνάρτηση περιορισμών υποδηλώνει ότι η παρουσία της επηρεάζει σημαντικά τη βελτίωση του τρέχοντος σχεδιασμού. Εξ ορισμού οι ισοτικές συναρτήσεις περιορισμών πρέπει να πληρούνται σε κάθε βήμα κι έτσι περιλαμβάνονται πάντα στο σύνολο των ενεργών συναρτήσεων περιορισμών. Για να συμπεριληφθεί μία ανισοτική συνάρτηση στο σύνολο των ενεργών συναρτήσεων περιορισμών θα πρέπει στην τρέχουσα φάση να πληρείται ως ισότητα, έστω και κατά προσέγγιση. Όταν μία συνάρτηση περιορισμού είναι ανενεργή, τότε η παρουσία της δεν επηρεάζει τη διαδικασία βελτιστοποίησης τη δεδομένη στιγμή αφού υπερκαλύπτεται από τις ενεργές συναρτήσεις περιορισμών. Αυτό δε σημαίνει βέβαια ότι η συνάρτηση αυτή είναι περιττή, αφού μπορεί σε κάποιο επόμενο βήμα να ενεργοποιηθεί. Συνήθως οι μαθηματικοί αλγόριθμοι βελτιστοποίησης για αύξηση της αποτελεσματικότητάς τους χρησιμοποιούν μόνο τις ενεργές συναρτήσεις περιορισμών. Υπάρχουν όμως και άλλες μέθοδοι βέλτιστου σχεδιασμού, όπως η εμπειρική μέθοδος της πλήρους εντατικής κατάστασης, οι οποίες βασίζονται στην εκμετάλλευση της ύπαρξης των ανενεργών συναρτήσεων περιορισμών.

Όπως προειπώθηκε, μέσα στο σύνολο των ενεργών συναρτήσεων περιορισμών συμπεριλαμβάνονται συνήθως και ανισοτικοί περιορισμοί οι οποίοι ικανοποιούνται προσεγγιστικά ως ισότητες. Όμως η εκάστοτε τιμή ενός ανισοτικού περιορισμού αυτή καθ' αυτή δεν μπορεί να μας δώσει κάποια χρήσιμη πληροφορία σχετικά με το αν ο υπό εξέταση περιορισμός είναι κοντά στο όριο, δηλαδή αν είναι ενεργός έστω και κατά προσέγγιση ή ανενεργός. Για παράδειγμα, ενδέχεται η τιμή μίας συνάρτησης περιορισμού μετατοπίσεων να είναι της τάξης των 0.1 – 2.0 cm, ενώ η τιμή μίας συνάρτησης περιορισμού τάσεων να είναι της τάξης των 25000 kPa. Είναι έτσι φανερό ότι προκειμένου να εντοπιστούν οι ενεργές συναρτήσεις περιορισμών πρέπει να γίνει μία κανονικοποίηση στις τιμές τους, ώστε να υπάρχει ένα ενιαίο σύστημα αναφοράς. Μέσω της κανονικοποίησης των τιμών αλλά και των παραγώγων των συναρτήσεων περιορισμών επιτυγχάνεται επίσης και βελτίωση της απόδοσης των αλγορίθμων βελτιστοποίησης, αλλά και μείωση των υπολογισμών καθώς απαιτείται πλέον η εύρεση των παραγώγων μόνο των ενεργών συναρτήσεων περιορισμών. Η κανονικοποίηση των τιμών των συναρτήσεων περιορισμών γίνεται σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$g_j^N(\vec{s}) = \frac{g_j^l - g_j}{|g_j^l|} \leq 0 \quad , \text{για } g_j \geq g_j^l \quad (1.3)$$

και

$$g_j^N(\vec{s}) = \frac{g_j - g_j^u}{|g_j^u|} \leq 0 \quad , \text{για } g_j \leq g_j^u \quad (1.4)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις, η πρώτη αναφέρεται σε μία συνάρτηση περιορισμών μορφής κάτω ορίου, ενώ η δεύτερη σε μία συνάρτηση περιορισμών μορφής άνω ορίου. Σε περίπτωση που μία συνάρτηση περιορισμών έχει κανονικοποιημένη τιμή λόγου χάρη +0.20, τότε παραβιάζει την επιτρεπόμενη τιμή κατά 20%, ενώ εάν έχει κανονικοποιημένη τιμή -0.20, τότε βρίσκεται κατά 20% εντός της επιτρεπόμενης περιοχής. Συνήθως μέσα στο σύνολο των ενεργών συναρτήσεων περιορισμών συμπεριλαμβάνονται όσες από αυτές έχουν κανονικοποιημένη τιμή από -0.1 έως -0.01. Επίσης, συνήθως επιτρέπεται μία μικρή ανοχή όταν οι συναρτήσεις περιορισμών παραβιάζουν ελάχιστα την επιτρεπόμενη τιμή (0.001 έως 0.005) αφού έτσι κι αλλιώς η όλη διαδικασία προσομοίωσης, ανάλυσης, σχεδιασμού και εφαρμογής εμπεριέχει πολλές προσεγγιστικές θεωρήσεις και αβεβαιότητες οπότε δεν έχει πρακτικό νόημα η εξεζητημένη αυστηρότητα στις υπερβάσεις των περιορισμών.

1.2.3 Αντικειμενική συνάρτηση

Όπως προειπώθηκε, ένας σχεδιασμός μπορεί να είναι εφικτός ή μη εφικτός. Σε κάθε πρόβλημα βελτιστοποίησης υπάρχουν πολλοί το πλήθος εφικτοί σχεδιασμοί, εκ των οποίων όμως κάποιοι υπερτερούν έναντι άλλων και ένας από αυτούς αποτελεί τη βέλτιστη λύση του προβλήματος. Για να γίνει αυτού του είδους η διάκριση μεταξύ καλού και ακόμη καλύτερου σχεδιασμού, είναι αναγκαία η ύπαρξη ενός κριτηρίου για τη σύγκριση και την αξιολόγηση των σχεδιασμών. Το κριτήριο αυτό είναι μια συνάρτηση η οποία λαμβάνει μια συγκεκριμένη τιμή για κάθε σχεδιασμό. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται αντικειμενική συνάρτηση και είναι εξαρτημένη από τις μεταβλητές σχεδιασμού (σχέσεις 1.1). Χωρίς βλάβη της γενικότητας οι εξισώσεις (1.1) αναφέρονται σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης της συνάρτησης $F(\vec{s})$ μπορεί να μετατραπεί εύκολα σε πρόβλημα

ελαχιστοποίησης της συνάρτησης $-F(\bar{s})$. Μία συνάρτηση της οποίας η τιμή ζητείται να ελαχιστοποιηθεί, συχνά αποκαλείται *συνάρτηση κόστους*.

Η επιλογή της κατάλληλης αντικειμενικής συνάρτησης είναι ένα σημαντικότερο θέμα για τη διαδικασία της βελτιστοποίησης. Στα προβλήματα βελτιστοποίησης κατασκευών, χαρακτηριστικά παραδείγματα αντικειμενικών συναρτήσεων είναι η ελαχιστοποίηση του βάρους, η ελαχιστοποίηση των τάσεων ή των μετατοπίσεων, η μεγιστοποίηση της ακαμψίας κ.α. Σε πολλά προβλήματα βέλτιστου σχεδιασμού κατασκευών ζητούμενο είναι η ταυτόχρονη βελτιστοποίηση δύο ή και περισσότερων αντικειμενικών συναρτήσεων. Για παράδειγμα, μπορεί το ζητούμενο να είναι η ελαχιστοποίηση του βάρους της κατασκευής και η ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση των μετατοπίσεων ή των τάσεων σε κάποια συγκεκριμένα σημεία του φορέα. Προβλήματα αυτού του τύπου ονομάζονται προβλήματα βελτιστοποίησης με πολλές αντικειμενικές συναρτήσεις (Multicriteria design optimization ή Pareto optimal design).

Κατά τη διάρκεια της αναζήτησης του βέλτιστου σχεδιασμού, απώτερος σκοπός ενός βελτιστοποιητή είναι η εύρεση του καθολικού βέλτιστου (το οποίο συνήθως στη βελτιστοποίηση κατασκευών, είναι το καθολικό ελάχιστο). Ο χώρος αναζήτησης όμως στη συνήθη περίπτωση των μη κυρτών προβλημάτων περιέχει και πολλά τοπικά ελάχιστα, στα οποία ενδέχεται να παγιδευτεί ο βελτιστοποιητής. Αυτό είναι ένα από τα κυριότερα προβλήματα των μαθηματικών μεθόδων βελτιστοποίησης και οφείλεται στον ντετερμινιστικό τρόπο λειτουργίας τους. Αντίθετα, οι μέθοδοι βελτιστοποίησης που βασίζονται σε πιθανοτικές θεωρήσεις, έχουν περισσότερες πιθανότητες να εντοπίσουν το καθολικό ελάχιστο, καθώς λόγω της τυχαμιακότητας που τις διέπει μπορούν να ξεφύγουν με μεγαλύτερη ευκολία από πιθανά τοπικά ελάχιστα. Ο ορισμός του τοπικού και του καθολικού ελάχιστου από μαθηματική σκοπιά, δίνεται ως εξής:

Τοπικό ελάχιστο (Local minimum). Ένα σημείο $\bar{s}^*$ στον χώρο σχεδιασμού θεωρείται τοπικό ή σχετικό ελάχιστο όταν πληρεί τις συναρτήσεις περιορισμών και ισχύει η σχέση $F(\bar{s}^*) \leq F(\bar{s})$ για κάθε σημείο εφικτού σχεδιασμού σε οσοδήποτε μικρή ακτίνα γύρω από το σημείο $\bar{s}^*$. Εάν ισχύει μόνο η ανισότητα, δηλαδή $F(\bar{s}^*) < F(\bar{s})$, τότε το σημείο $\bar{s}^*$ καλείται “αυστηρό” (strict) ή “μοναδικό” (unique) ή “δυνατό” (strong) τοπικό ελάχιστο.

Καθολικό ελάχιστο (Global minimum). Ένα σημείο $\bar{s}^*$ στον χώρο σχεδιασμού θεωρείται καθολικό ή απόλυτο ελάχιστο όταν πληρεί τις συναρτήσεις περιορισμών και ισχύει η σχέση $F(\bar{s}^*) \leq F(\bar{s})$ για κάθε σημείο εφικτού σχεδιασμού. Εάν ισχύει μόνο η ανισότητα, δηλαδή $F(\bar{s}^*) < F(\bar{s})$, τότε το σημείο $\bar{s}^*$ καλείται “αυστηρό” (strict) ή “μοναδικό” (unique) ή “δυνατό” (strong) καθολικό ελάχιστο.

Στην περίπτωση που δεν υπάρχουν συναρτήσεις περιορισμών τότε ισχύουν οι ίδιοι ορισμοί, αλλά σε ολόκληρο τον χώρο σχεδιασμού και όχι μόνο στην περιοχή εφικτών σχεδιασμών. Γενικά είναι δύσκολο να προσδιοριστεί εκ των προτέρων ότι όντως υπάρχει τοπικό ή καθολικό ελάχιστο σε ένα πρόβλημα βέλτιστου σχεδιασμού. Πάντως εάν η αντικειμενική συνάρτηση $F(\bar{s})$ είναι συνεχής και η περιοχή εφικτών σχεδιασμών είναι μη κενή (non empty), κλειστή (closed) και καθορισμένη (bounded), τότε αποδεικνύεται μαθηματικά ότι υπάρχει πάντοτε καθολικό ελάχιστο για την $F(\bar{s})$. Η περιοχή εφικτών σχεδιασμών είναι μη κενή όταν δεν υπάρχουν αλληλοσυγκρουόμενες ή υπεράριθμες συναρτήσεις περιορισμών, ενώ θεωρείται κλειστή και καθορισμένη όταν οι συναρτήσεις περιορισμών είναι συνεχείς και δεν υπάρχουν “αυστηρές” ανισότητες ($g < 0$). Οι παραπάνω συνθήκες είναι ικανές για την εξασφάλιση του καθολικού ελαχίστου, όχι όμως και αναγκαίες. Αυτό σημαίνει ότι ακόμη κι αν δεν ικανοποιούνται οι συνθήκες αυτές, ενδέχεται να υπάρχει καθολικό ελάχιστο, το οποίο πιθανά θα προκύψει κατά τη διάρκεια της διαδικασίας βελτιστοποίησης. Εάν ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης δεν μπορεί να εντοπίσει κανένα εφικτό σημείο τότε η περιοχή εφικτών σχεδιασμών είναι κενή και επομένως πρέπει να επαναδιατυπωθεί το πρόβλημα αφαιρώντας κάποιες συναρτήσεις περιορισμών ή κάνοντας αυτές ελαστικότερες.

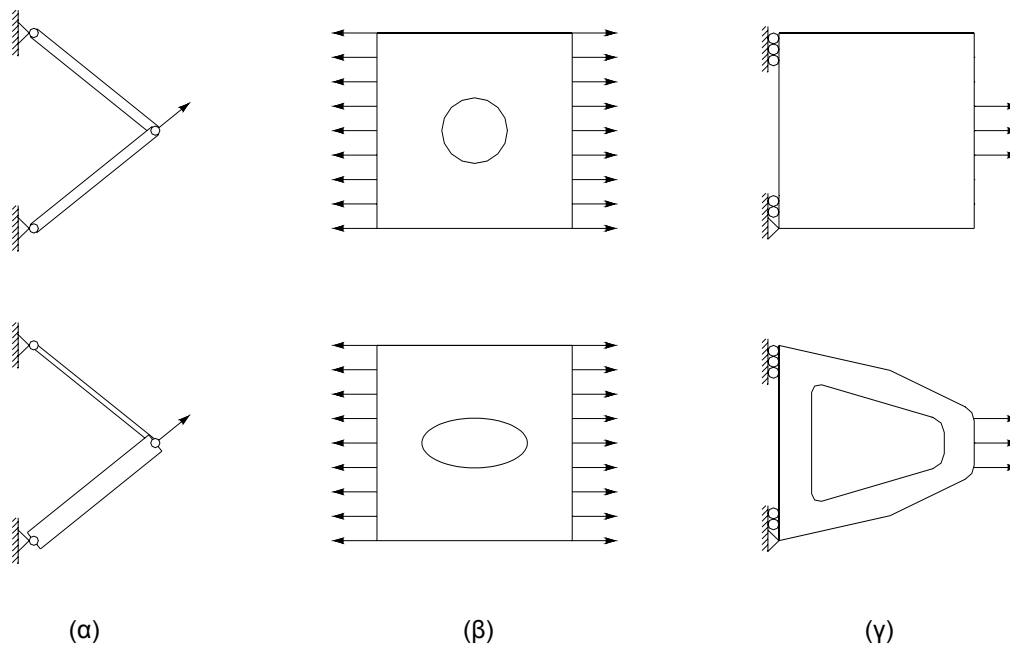
1.3 Κατηγορίες βελτιστοποίησης κατασκευών

Η βελτιστοποίηση κατασκευών χωρίζεται γενικά σε τρεις μεγάλες κατηγορίες:

- (i) Τη βελτιστοποίηση της τοπολογίας (Topology optimization)
- (ii) Τη βελτιστοποίηση του σχήματος (Shape optimization)
- (iii) Τη βελτιστοποίηση των μεγεθών των διατομών (Sizing optimization)

Σήμερα υπάρχει η τάση ένα γενικό πρόβλημα βελτιστοποίησης να εντοπίζεται αρχικά ως πρόβλημα εύρεσης της βέλτιστης τοπολογίας και στη συνέχεια ως πρόβλημα εύρεσης του βέλτιστου σχήματος ή εύρεσης των βέλτιστων διατομών.

Στο σχήμα 1.1 που ακολουθεί παρουσιάζονται οι τρεις διαφορετικοί τύποι βελτιστοποίησης. Για την κάθε περίπτωση, παρουσιάζεται ο αρχικός φορέας και ο φορέας μετά το πέρας της διαδικασίας βελτιστοποίησης.



(α)

(β)

(γ)

Σχήμα 1.1. Είδη βελτιστοποίησης κατασκευών:

(α) βαθμωτών μεγεθών (διατομών) , (β) σχήματος, (γ) τοπολογίας

Στις επόμενες παραγράφους, θα γίνει μια σύντομη αναφορά στις τρεις κατηγορίες βελτιστοποίησης. Με την τρίτη κατηγορία (βελτιστοποίηση βαθμωτών μεγεθών), η οποία αποτελεί και το κατεξοχήν αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας, θα ασχοληθούμε και στο κεφάλαιο των εφαρμογών.

1.3.1 Βελτιστοποίηση τοπολογίας κατασκευών (Topology optimization)

Στον σχεδιασμό των κατασκευών είναι απαραίτητο να καθορισθεί μία όσο το δυνατόν καλύτερη τοπολογία (topology) ή “δομή” (layout) της κατασκευής, έτσι ώστε να

γίνει αποτελεσματικότερη στην ανάληψη φορτίων και οικονομικότερη. Στον όρο “δομή” της κατασκευής συμπεριλαμβάνεται κάθε είδους πληροφορία που αφορά την τοπολογία, το σχήμα και το μέγεθός της.

Η τοπολογία μίας κατασκευής συνήθως είναι προκαθορισμένη από τις απαιτήσεις του προβλήματος και τους κατασκευαστικούς περιορισμούς, ή προέρχεται από κάποιο αρχικό σχεδιασμό του μηχανικού. Οι αλγόριθμοι βελτιστοποίησης της τοπολογίας, οι οποίοι άρχισαν να αναπτύσσονται μόλις τα τελευταία δεκαπέντε χρόνια, είναι εργαλεία που βοηθάνε τον σχεδιαστή μηχανικό να επιτύχει την αποτελεσματική χρήση των υλικών για να καλύψει τις ανάγκες του προβλήματος. Αρχικά ορίζεται ο χώρος σχεδιασμού ή αναφοράς (reference domain), ο τύπος υλικού, οι συνθήκες στήριξης και οι φορτίσεις και έπειτα γίνεται η ανάλυση του φορέα και η επαναληπτική διαδικασία που θα οδηγήσει στη βέλτιστη τοπολογία, δηλαδή στην καλύτερη δυνατή κατανομή υλικού στην κατασκευή.

Έχοντας επιτύχει τη βέλτιστη τοπολογία το επόμενο βήμα προς τον βέλτιστο σχεδιασμό είναι να “καθαριστεί” το σχήμα και το μέγεθος του φορέα με κατάλληλους αλγόριθμους βελτιστοποίησης. Οι αλγόριθμοι αυτοί, που έχουν να κάνουν με τη βελτιστοποίηση του σχήματος πλέον της κατασκευής, έρχονται να δράσουν συμπληρωματικά με τη βελτιστοποίηση της τοπολογίας, ώστε να επιτευχθεί τελικά η βέλτιστη δομή της κατασκευής.

1.3.2 Βελτιστοποίηση σχήματος κατασκευών (Shape optimization)

Η βελτιστοποίηση σχήματος (Shape optimization) είναι ένα σχετικά καινούργιο πεδίο έρευνας στον χώρο του βέλτιστου σχεδιασμού κατασκευών. Με τη βελτιστοποίηση σχήματος, μεταβάλλονται το εσωτερικό και το εξωτερικό περίγραμμα της κατασκευής ώστε να επιτευχθεί η καλύτερη δυνατή κατανομή των τάσεων στο εσωτερικό της. Οι πρώτες μεθοδολογίες καταγράφονται σποραδικά στη δεκαετία του 1970 παίρνοντας στοιχεία από τη βελτιστοποίηση βαθμωτών μεγεθών κατασκευών. Οι πρώτες δομημένες τεχνικές πάνω στο αντικείμενο άρχισαν να υλοποιούνται στη δεκαετία του 1980, οπότε έγιναν και οι πρώτες απόπειρες καταγραφής της υπάρχουσας βιβλιογραφίας στον τομέα αυτόν. Τα τελευταία χρόνια και με τη βοήθεια που παρέχουν τα εξελιγμένα πακέτα λογισμικού γεωμετρικής μοντελοποίησης και γραφικής αναπαράστασης έχουν αναπτυχθεί αρκετά προχωρημένα

αυτόματα συστήματα βελτιστοποίησης σχήματος που καλύπτουν μια ευρεία γκάμα κατασκευαστικών προβλημάτων.

Το πρόβλημα της βελτιστοποίησης του σχήματος των κατασκευών είναι ιδιαίτερα δύσκολο, καθώς η γεωμετρία και το μοντέλο ανάλυσης μεταβάλλονται συνεχώς, σε αντίθεση με το πρόβλημα της βελτιστοποίησης διατομών και ιδιοτήτων υλικών, όπου στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του βάρους κάποιου φορέα συγκεκριμένου σχήματος και τοπολογίας. Η βελτιστοποίηση σχήματος όμως, παρ' όλη την πολυπλοκότητά της, είναι πολύ πιο αποτελεσματική, ειδικά σε προβλήματα βελτιστοποίησης συνεχών κατασκευών. Ας θεωρήσουμε, λόγου χάρη, μία πλάκα με μία οπή στο κέντρο της, στα χείλη της οποίας αναμένεται συγκέντρωση τάσεων. Βελτιστοποίηση της πλάκας μόνο ως προς το πάχος (βαθμωτό μέγεθος) απλά θα επιφέρει ένα αυξομειούμενο πάχος, ιδιαίτερα μεγάλο γύρω από την οπή. Μια τέτοια λύση είναι προβληματική τόσο κατασκευαστικά όσο και από άποψη λειτουργικότητας. Αντίθετα, η αντιμετώπιση του ίδιου προβλήματος με τεχνικές βελτιστοποίησης σχήματος θα επηρεάσει μόνο το σύνορο της οπής κάνοντάς το ομαλό με μορφή έλλειψης (σχήμα 1.1β).

Συνήθως η βελτιστοποίηση του σχήματος μίας κατασκευής είναι το δεύτερο στάδιο του βέλτιστου σχεδιασμού της, λαμβάνοντας ως δεδομένο ότι έχει προηγηθεί ένα πρώτο στάδιο όπου έχει ευρεθεί η τοπολογία της κατασκευής, είτε αυτόματα μέσω κάποιου αλγόριθμου βελτιστοποίησης, είτε εμπειρικά από τον σχεδιαστή. Υπάρχουν ωστόσο και μέθοδοι οι οποίες βελτιώνουν ταυτόχρονα και την τοπολογία και το σχήμα της κατασκευής. Στόχος των μεθόδων βελτιστοποίησης σχήματος είναι να βελτιώσουν το σχήμα της κατασκευής και κατά συνέπεια να γίνει πιο οικονομική και λειτουργική η χρήση της, λαμβάνοντας φυσικά υπόψη διάφορους περιορισμούς που τίθενται για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Συνήθως αυτό γίνεται σε τρεις φάσεις σε κάθε βήμα της διαδικασίας βελτιστοποίησης του σχήματος: (i) Καθορισμός και έλεγχος του σχήματος, (ii) Ανάλυση της απόκρισης της κατασκευής (συμπεριλαμβανομένης και της ανάλυσης ευαισθησίας αυτής, αν ο χρησιμοποιούμενος αλγόριθμος βελτιστοποίησης το απαιτεί), (iii) Επίλυση του μαθηματικού προβλήματος της βελτιστοποίησης με τη χρήση κάποιου ντετερμινιστικού μαθηματικού ή πιθανοτικού αλγορίθμου βελτιστοποίησης. Η αυτοματοποιημένη βελτιστοποίηση σχήματος παρέχει στο σχεδιαστή ένα αρκετά γενικό και ευέλικτο πλαίσιο, έτσι ώστε διαλέγοντας κατάλληλα τις παραμέτρους σχεδιασμού, την αντικειμενική συνάρτηση και τις συναρτήσεις περιορισμών, να μορφώσει το καλύτερο δυνατό μοντέλο για τη βελτιστοποίηση οποιουδήποτε σχήματος.

1.3.3 Βελτιστοποίηση των μεγεθών των διατομών (Sizing optimization)

Το πρόβλημα της βελτιστοποίησης των μεγεθών των διατομών ενός φορέα συγκεκριμένης τοπολογίας και σχήματος είναι το πρώτο πρόβλημα βελτιστοποίησης με το οποίο ασχολήθηκαν εκτενώς οι ερευνητές. Στην αρχή ως παράμετροι σχεδιασμού χρησιμοποιούνταν οι διαστάσεις των διατομών δικτυωτών κατασκευών ή πλαισίων και αργότερα τα πάχη πλακών και κελυφών. Η συνηθέστερη αντικειμενική συνάρτηση για τέτοια προβλήματα ήταν και παραμένει το βάρος της κατασκευής, το οποίο ζητείται να ελαχιστοποιηθεί υπό κάποιους περιορισμούς (π.χ. στις τάσεις κάποιων μελών, στις μετατοπίσεις κάποιων κόμβων, κ.α.).

Η διαδικασία βελτιστοποίησης των βαθμωτών μεγεθών, ακολουθεί γενικά τα ακόλουθα βήματα: (i) Ορίζεται το δομοστατικό μοντέλο, η γεωμετρία και τα φορτία σχεδιασμού της κατασκευής. (ii) Ορίζεται το μοντέλο βελτιστοποίησης, δηλαδή γίνεται η επιλογή των παραμέτρων σχεδιασμού (οι οποίες ενδέχεται να είναι εξαρτώμενες η μία από την άλλη) και η επιλογή των συναρτήσεων περιορισμών. (iii) Υπολογίζονται οι τάσεις και οι μετατοπίσεις στα μέλη της κατασκευής για τον εκάστοτε σχεδιασμό με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, ώστε να γίνει ο έλεγχος των περιορισμών. (iv) Στην περίπτωση που χρησιμοποιείται μαθηματικός βελτιστοποιητής (SQP), διενεργείται ανάλυση ευαισθησίας των περιορισμών και της αντικειμενικής συνάρτησης για μικρές μεταβολές των παραμέτρων σχεδιασμού. (v) Αν τα κριτήρια τερματισμού που έχουν τεθεί ικανοποιούνται, τότε θεωρείται ότι έχει εντοπιστεί το βέλτιστο και η διαδικασία τερματίζεται, διαφορετικά ο βελτιστοποιητής επιλέγει νέους υποψήφιους βέλτιστους σχεδιασμούς και η διαδικασία επιστρέφει στο βήμα (iii).

1.4 Μέθοδοι βέλτιστου σχεδιασμού

Οι αλγόριθμοι βελτιστοποίησης μπορούν να χωριστούν γενικά σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

- (i) Τις μαθηματικές ή αιτιοκρατικές μεθόδους, και
- (ii) Τις εξελικτικές ή δαρβίνειες μεθόδους

1.4.1 Μαθηματικές μέθοδοι βελτιστοποίησης

Οι μαθηματικές μέθοδοι προέρχονται από τις επιστημονικές περιοχές των οικονομικών μαθηματικών και της επιχειρησιακής έρευνας και ήταν οι πρώτες που εφαρμόστηκαν σε προβλήματα βέλτιστου σχεδιασμού κατασκευών. Ο κλάδος της επιστήμης των μαθηματικών που έχει ως αντικείμενο τη βελτιστοποίηση της απόδοσης ενός συστήματος που υπόκειται σε ορισμένους περιορισμούς, ονομάζεται *Μαθηματικός Προγραμματισμός* (Mathematical Programming). Φυσικά απαραίτητη προϋπόθεση για να λυθεί ένα πρόβλημα με μεθόδους μαθηματικού προγραμματισμού είναι να μπορεί το πρόβλημα αυτό να μετατραπεί σε αυστηρά μαθηματική μορφή. Ο όρος μαθηματικός προγραμματισμός, που δεν πρέπει να συγχέεται με την ανάπτυξη προγραμμάτων λογισμικού, χρησιμοποιήθηκε πολύ πριν την ευρεία εφαρμογή των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Ο όρος αυτός αφορά τη μελέτη προβλημάτων βελτιστοποίησης, τις μαθηματικές ιδιότητες και την ανάπτυξη αλγορίθμων βέλτιστου σχεδιασμού.

Οι τεχνικές βελτιστοποίησης που βασίζονται στις αρχές του μαθηματικού προγραμματισμού μπορούν γενικά να ταξινομηθούν σε πέντε μεγάλες κατηγορίες:

(i) **Γραμμικός Προγραμματισμός (Linear Programming – LP)**. Οι μέθοδοι γραμμικού προγραμματισμού αντιμετωπίζουν προβλήματα στα οποία τόσο η αντικειμενική συνάρτηση όσο και οι συναρτήσεις περιορισμών είναι γραμμικές συναρτήσεις των μεταβλητών σχεδιασμού. Σε αυτήν την περίπτωση η βέλτιστη λύση βρίσκεται επί του συνόρου μίας ή περισσότερων συναρτήσεων περιορισμού. Σε προβλήματα αυτού του είδους (κυρτά) ένα τοπικό ελάχιστο είναι οπωσδήποτε και καθολικό ελάχιστο του προβλήματος.

(ii) **Μη Γραμμικός Προγραμματισμός (Non Linear Programming – NLP)**. Είναι οι πιο διαδεδομένες τεχνικές μαθηματικού προγραμματισμού, ιδιαίτερα σε προβλήματα βελτιστοποίησης κατασκευών, αφού αντιμετωπίζουν γενικά όλες τις περιπτώσεις όπου η αντικειμενική συνάρτηση αλλά και οι συναρτήσεις περιορισμών είναι μη γραμμικές συναρτήσεις των μεταβλητών σχεδιασμού. Σε αυτή την περίπτωση (μη κυρτό πρόβλημα) η εύρεση ενός τοπικού ελαχίστου δεν πιστοποιεί την εύρεση ενός καθολικού ελαχίστου.

(iii) **Ακέραιος Προγραμματισμός (Integer Programming – IP)**. Οι μέθοδοι αυτές αντιμετωπίζουν προβλήματα στα οποία οι παράμετροι σχεδιασμού δεν είναι συνεχείς, αλλά παίρνουν διακριτές τιμές από κάποιο συγκεκριμένο σύνολο τιμών. Συνήθως οι τιμές αυτές

είναι ακέραιες, εξ' ου και το όνομα “Ακέραιος Προγραμματισμός”. Επίσης υπάρχουν και περιπτώσεις “Μικτού Ακέραιου Προγραμματισμού” (Mixed Integer Programming), όπου κάποιες από τις παραμέτρους σχεδιασμού είναι διακριτές και άλλες είναι συνεχείς.

(iv) **Γεωμετρικός προγραμματισμός (Geometric Programming – GP).** Αναφέρεται σε μία ειδική κατηγορία προβλημάτων όπου οι συναρτήσεις περιορισμών αλλά και η αντικειμενική συνάρτηση είναι πολυωνυμικής μορφής συναρτήσεις των παραμέτρων σχεδιασμού. Σε προβλήματα αυτού του είδους πρέπει να ισχύει πάντα η αυστηρή προϋπόθεση ότι οι παράμετροι σχεδιασμού λαμβάνουν πάντα θετικές τιμές.

(v) **Δυναμικός προγραμματισμός (Dynamic Programming – DP).** Κύριος στόχος αυτών των μεθόδων είναι να διασπασθεί ένα σχετικά μεγάλο πρόβλημα βελτιστοποίησης σε μικρότερα τα οποία μπορούν να αντιμετωπισθούν ως ξεχωριστά προβλήματα βέλτιστου σχεδιασμού. Κάθε υποπρόβλημα περιέχει μέρος από τα στοιχεία του καθολικού προβλήματος και μπορεί να επιλυθεί με κάποια από τις προαναφερθείσες μεθοδολογίες. Έτσι στην ουσία ο δυναμικός προγραμματισμός δεν αποτελεί μια ξεχωριστή τεχνική μαθηματικής βελτιστοποίησης αλλά μάλλον μία τεχνική διαμερισμού μεγάλων προβλημάτων βελτιστοποίησης σε μικρότερα..

1.4.2 Εξελικτικές μέθοδοι βελτιστοποίησης

Ήδη από τη δεκαετία του 1960 είχαν αρχίσει να εφαρμόζονται τεχνικές βασιζόμενες σε τυχαματικές διαδικασίες δειγματοληψίας που προσομοίαζαν γενετικές διεργασίες και πρότυπα για την επίλυση προβλημάτων επιχειρησιακής έρευνας, οικονομικών μαθηματικών καθώς και υπολογιστικής μηχανικής. Οι πιο διαδεδομένες από τις μεθόδους αυτές είναι οι επονομαζόμενες *Δαρβίνειες Μέθοδοι* οι οποίες οφείλουν την ονομασία τους στο γεγονός ότι μιμούνται τη διαδικασία της εξέλιξης των ειδών στη φύση, όπως την παρουσίασε πρώτος ο Κάρολος Δαρβίνος.

Οι Δαρβίνειες μέθοδοι ή διαφορετικά *Μέθοδοι Εξελικτικών Αλγορίθμων* (Evolutionary Algorithms) σε αντίθεση με τις μεθόδους μαθηματικού προγραμματισμού, χρησιμοποιούν έναν “πληθυσμό” πιθανών λύσεων του προβλήματος. Οι λύσεις αυτές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και μπορούν να αντιμετωπιστούν επίσης ανεξάρτητα η μία από την άλλη, πράγμα που καθιστά ιδιαίτερα αποδοτική την εφαρμογή των μεθόδων αυτών σε

παράλληλο υπολογιστικό περιβάλλον. Ο αρχικός πληθυσμός επιλέγεται με τυχαίο τρόπο και στη συνέχεια με τη χρήση κατάλληλων γενετικών μηχανισμών όπως είναι η *Επιλογή* (Selection), ο *Ανασυνδυασμός* (Recombination) και η *Μετάλλαξη* (Mutation), ο πληθυσμός εξελίσσεται κινούμενος σε όλο και καλύτερες περιοχές του χώρου αναζήτησης και μέσω της αρχής της επικράτησης του ισχυροτέρου (Survival of the fittest) επιτυγχάνεται ο εντοπισμός της βέλτιστης λύσης.

Οι μέθοδοι αυτές εφαρμόζονται σήμερα συχνά στον βέλτιστο σχεδιασμό των κατασκευών, με ιδιαίτερα ενθαρρυντικά αποτελέσματα. Το βασικό τους πλεονέκτημα είναι ότι λόγω της τυχαμιακότητας στην διερεύνηση του χώρου αναζήτησης, έχουν μεγαλύτερες πιθανότητες για την εύρεση του απόλυτα βέλτιστου σχεδιασμού σε σχέση με τις μαθηματικές μεθόδους οι οποίες χρησιμοποιούν νομοτελειακά καθορισμένες σχέσεις. Από την άλλη, το κυριότερο μειονέκτημα των μεθόδων αυτών είναι ο μεγάλος αριθμός των επαναλήψεων που απαιτούνται κατά τη διαδικασία βελτιστοποίησης, παρόλο που το υπολογιστικό κόστος της κάθε μίας από αυτές είναι σχετικά μικρό, αφού δεν εμπεριέχεται ανάλυση ευαισθησίας.

Οι σημαντικότερες από τις μεθόδους αυτές είναι:

(i) **Η μέθοδος των Γενετικών αλγορίθμων (Genetic Algorithms – GA).** Η μέθοδος των ΓΑ αναπτύχθηκε από τον J. Holland και τους συνεργάτες του στο πανεπιστήμιο του Michigan. Πρόκειται για μία από τις κυριότερες εξελικτικές μεθόδους, που λόγω της απλής δομής και της ευχρηστίας της έχει βρει εφαρμογή στη βελτιστοποίηση κατασκευών. Οι ΓΑ βασίζονται στην τυχαία ανασυγκρότηση ενός πληθυσμού και την αξιολόγηση των μελών του πληθυσμού μέσω μίας συνάρτησης ποιότητας (Fitness ή Quality function), που σε προβλήματα βελτιστοποίησης ισούται με το άθροισμα της αντικειμενικής συνάρτησης και των παραβιάσεων των συναρτήσεων περιορισμού. Τα μέλη του πληθυσμού των ΓΑ κωδικοποιούνται σε δυαδική (binary) μορφή, ώστε να προσομοιάζουν καλύτερα τα βιολογικά χρωμοσώματα (strings). Με τη χρήση των γενετικών τελεστών του συνδυασμού και της μετάλλαξης, οι ΓΑ επιλέγουν το καλύτερο μέλος του πληθυσμού, δηλαδή αυτό που δίνει την καλύτερη τιμή στη συνάρτηση ποιότητας.

(ii) **Η μέθοδος των Στρατηγικών Εξέλιξης (Evolution Strategies – ES).** Η μέθοδος των ΣΕ αναπτύχθηκε αρχικά από τον I. Rechenberg και εν συνεχεία από τον H.P. Schwefel και την ερευνητική του ομάδα. Η μέθοδος αυτή αποτελεί το κύριο αντικείμενο έρευνας της

παρούσας διπλωματικής εργασίας και γι' αυτό θα ασχοληθούμε διεξοδικά μαζί της στο επόμενο κεφάλαιο.

(iii) **Η μέθοδος του Εξελικτικού Προγραμματισμού (Evolutionary Programming – EP).** Η μέθοδος του ΕΠ αναπτύχθηκε από τους L.J. Fogel et al. και βασίζεται αποκλειστικά στην αρχή της επιλογής του καλύτερου και όχι στη διαδικασία της αναπαραγωγής των ειδών. Για τον λόγο αυτό έχει μειωμένες δυνατότητες και περιορισμένη αποτελεσματικότητα.

(iv) **Η μέθοδος του Γενετικού Προγραμματισμού (Genetic Programming – GP).** Η μέθοδος του ΓΠ, η οποία αναπτύχθηκε από τον J.R. Koza, διαφέρει κατά πολύ από τις προαναφερθείσες εξελικτικές μεθοδολογίες και απλά έχει ως στόχο την αυτόματη παραγωγή προγραμμάτων H/Y για την αντιμετώπιση συγκεκριμένων προβλημάτων (π.χ. γεννήτρια τυχαίων αριθμών).

Μία επίσης τυχηματική αλλά διαφορετικής δομής τεχνική είναι **η μέθοδος της Προσομοίωσης Ανόπτησης (Simulated Annealing).** Η μέθοδος αυτή ακολουθεί τους τυχηματικούς νόμους που διέπουν την κίνηση των μορίων στο εσωτερικό ενός μεταλλικού σώματος κατά τη σταδιακή ψύξη αυτού. Τα μόρια κινούνται ώστε να εντοπιστεί η κατάσταση με την ελάχιστη δυνατή δυναμική ενέργεια για την τρέχουσα θερμοκρασία, ώστε τελικά στην χαμηλότερη θερμοκρασία να επιτευχθεί η ελάχιστη όλων των δυνατών ενεργειακά καταστάσεων.

2

Στρατηγικές Εξέλιξης (Evolution Strategies – ES)

2.1 Δαρβίνεια θεωρία για την εξέλιξη των ειδών

Οι Βρετανός βιολόγος Κάρολος Δαρβίνος (Charles Robert Darwin, 1809-1882), όπως και πολλοί άλλοι βιολόγοι της εποχής του, πίστευε ότι οι ζωντανοί οργανισμοί εξελίσσονται, δηλαδή ότι, με την πάροδο του χρόνου, μερικά είδη μετατρέπονται σε συγγενικά είδη, ενώ άλλα εξαφανίζονται. Εκείνο που προβλημάτιζε τον Δαρβίνο ήταν ο μηχανισμός με τον οποίο πραγματοποιείται αυτή η εξέλιξη.

Το 1838 ο Δαρβίνος διάβασε το έργο του Τόμας Μάλθους (Tomas Robert Malthus, 1766-1834) *Essay on Population* (Δοκίμιο για τον πληθυσμό) και συνειδητοποίησε ότι ο άνθρωπος δεν είναι το μόνο είδος που πολλαπλασιάζεται σε σημείο ώστε να μην του επαρκούν οι διαθέσιμες πηγές τροφής – το ίδιο συμβαίνει και με όλους τους ζωντανούς οργανισμούς. Επομένως, σε κάθε γενιά υπάρχει ένας ανταγωνισμός ανάμεσα στα μέλη του κάθε είδους για την επιβίωση και από τον ανταγωνισμό αυτό, επιζούν εκείνα τα άτομα που κατορθώνουν να εξασφαλίζουν αρκετή τροφή και να αντιμετωπίζουν καλύτερα τους εχθρούς τους. Με άλλα λόγια, η ίδια η φύση επιλέγει έναν περιορισμένο αριθμό ατόμων για επιβίωση. Τα χαρακτηριστικά που κάνουν πιο πιθανή την επιβίωση θα κληροδοτηθούν στους απογόνους των ατόμων που έχουν επιζήσει, ενώ ο μηχανισμός της *Φυσικής Επιλογής*, όπως ονομάζεται η αρχή της διατήρησης και επιβίωσης του καλύτερα προσαρμοζόμενου (ευνοούμενου) οργανισμού, θα εξακολουθήσει να λειτουργεί και στη γενιά των απογόνων. Ο Δαρβίνος θεώρησε ότι ανάμεσα στους απογόνους υπάρχουν πάντοτε τυχαίες και πολύ μικρές διαφοροποιήσεις και ότι η ίδια η φύση τις χρησιμοποιεί ως ένα μέσο επιλογής. Οι

“καλύτερες” ποικιλίες δεν θα τα καταφέρνουν καλύτερα σε κάθε μεμονωμένη περίπτωση, αφού επιδρά και ο παράγοντας της τύχης, όμως μακροπρόθεσμα θα έχουν μεγαλύτερες πιθανότητες επιβίωσης. Είναι δε πιθανό, καθώς με τον χρόνο συσσωρεύονται ευνοϊκά γνωρίσματα σε ορισμένα άτομα, τα άτομα αυτά να γίνουν τόσο διαφορετικά από εκείνα του αρχικού πληθυσμού ώστε τελικά να αποτελέσουν ένα νέο είδος.

Αυτή είναι η θεωρία της εξέλιξης μέσω της φυσικής επιλογής. Ο Δαρβίνος γνωρίζοντας τις έντονες αντιδράσεις που θα προκαλούσε η δημοσίευση της επιστημονικής του εργασίας στην κοινή γνώμη, λόγω της έντονης προσκόλλησης των ανθρώπων της εποχής σε προκαταλήψεις και δεισιδαιμονίες, ανάλωσε γύρω στα είκοσι χρόνια συγκεντρώνοντας ενδείξεις για την ορθότητα της θεωρίας του, ώστε να μετριάσει τις αντιδράσεις. Το 1859 δημοσίευσε τελικά το σχετικό βιβλίο που είναι γνωστό με τον τίτλο *The Origin of Species* (Η προέλευση των ειδών), το οποίο άλλαξε τον τρόπο σκέψης των ανθρώπων και αποτελεί ίσως μέχρι σήμερα το πιο αξιόλογο επιστημονικό έργο, μετά το κλασικό σύγγραμμα του Νεύτωνα.

Οι βασικοί παράγοντες στην εξέλιξη των ειδών, τους οποίους επισήμανε ο Δαρβίνος, είναι οι ακόλουθοι:

(i) **Μεταλλάξεις:** Οι κληρονομήσιμες αλλαγές του γενετικού υλικού ονομάζονται *μεταλλάξεις*. Οι διάφοροι τύποι μεταλλάξεων (γονιδιακές, χρωμοσωμικές) έχουν σαν αποτέλεσμα να μεταβληθεί η συχνότητα κάποιου ή κάποιων γονιδίων μέσα σε έναν πληθυσμό και να εμφανιστούν “νέα” χαρακτηριστικά μέσα στο είδος. Οι μεταλλάξεις, αν και αυξάνουν τη γενετική ποικιλότητα προσφέροντας έτσι υλικό και δυνατότητες για την εξέλιξη, δεν μπορούν από μόνες τους να καθορίσουν και την κατεύθυνση της εξελικτικής πορείας. Η φυσιολογική ζωή των γονιδίων επιβάλλει τον αυτοδιπλασιασμό τους ενώ τα χρωμοσώματα διαχωρίζονται κατά τη διάρκεια της ζωής ενός κυττάρου ή οργανισμού με μαθηματική ακρίβεια. Αυτό συμβαίνει χιλιάδες φορές χωρίς το παραμικρό λάθος. Διάφοροι συνδυασμοί γονιδίων προκαλούν τη δημιουργία ποικιλιών στους απογόνους, χωρίς να μεταβληθούν τα επιμέρους γονίδια. Σπάνια όμως εμφανίζεται σε έναν απόγονο μια ιδιότητα που δεν προϋπάρχει σε κανένα γονέα. Αν συμβεί κάτι τέτοιο, τότε έχουμε μια αλλαγή στο γενετικό υλικό, η οποία ονομάζεται *μετάλλαξη*. Στη βιολογία, ανάλογα με το σημείο του γενετικού υλικού στο οποίο συνέβη η μόνιμη αλλαγή και προξενήθηκε η μετάλλαξη, γίνεται διάκριση σε Γονιδιακή μετάλλαξη και Χρωμοσωμική ανωμαλία.

(ii) **Φυσική επιλογή:** Τα μεταλλαγμένα γονίδια, μαζί με τα νέα γνωρίσματα που δίνουν στον οργανισμό, αξιολογούνται με βάση τη χρησιμότητά τους. Όσα μεταλλαγμένα γονίδια ευνοούν την επιβίωση αυξάνουν τη συχνότητά τους, καθώς πληθαίνουν και αυτά μαζί με τα άτομα που τα φέρουν, ενώ αντίθετα όσα δεν ευνοούν την επιβίωση των ατόμων που τα φέρουν ή είναι αρνητικά για τη ζωή (θνησιγόνα γονίδια) εξαφανίζονται μαζί με τους φορείς τους. Η διαδικασία που “αποφασίζει” ποια μεταλλαγμένα γονίδια θα επιζήσουν και ποια θα εκλείψουν ονομάζεται *Φυσική Επιλογή*. Ο ρόλος της φυσικής επιλογής είναι επομένως να κατευθύνει τη γενετική ποικιλότητα των μεταλλάξεων προς συγκεκριμένη εξελικτική πορεία με μόνο κριτήριο το κέρδος για τη μακροχρόνια επιβίωση του οργανισμού.

(iii) **Γενετικές απομονώσεις:** Διάφορες αιτίες μπορεί να εμποδίσουν τη γόνιμη διασταύρωση ατόμων που ανήκουν στο ίδιο είδος, με αποτέλεσμα να διαταράσσεται η φυσιολογική ανταλλαγή γονιδίων και να μεταβάλλεται η γονιδιακή συχνότητα. Οι γενετικές απομονώσεις αναφέρονται σε αιτίες και καταστάσεις που επηρεάζουν τη διακίνηση και ροή των γονιδίων μέσα σε έναν πληθυσμό. Τα εμπόδια αυτά αποτελούν τελικά τους φραγμούς ή τους μηχανισμούς απομόνωσης των πληθυσμών.

Το φαινόμενο της αναπαραγωγής λοιπόν, όπως παρατηρείται στη φύση, αποβλέπει στη δημιουργία απογόνων με αυξημένη ικανότητα επιβίωσης στο εκάστοτε περιβάλλον. Αποτέλεσμα αυτής της αναπαραγωγής είναι η μεταφορά βιολογικών πληροφοριών από γενιά σε γενιά. Οι πληροφορίες αυτές ή διαφορετικά το γενετικό υλικό ενός ατόμου, δεν είναι τίποτε άλλο παρά οι ιδιότητες ή τα γνωρίσματα τα οποία βρίσκονται στους γονείς και μεταφέρονται στους απογόνους. Το γενετικό υλικό βρίσκεται στον πυρήνα ορισμένων κυττάρων (ευκαρυωτικά κύτταρα) αποθηκευμένο στα χρωμοσώματα, ο ρόλος των οποίων είναι η αντιγραφή, η διατήρηση και η μεταφορά της γενετικής πληροφορίας. Πάνω στα χρωμοσώματα βρίσκονται τα γονίδια τα οποία είναι αυτά που καθορίζουν την έκφραση της γενετικής πληροφορίας που μεταφέρουν.

2.2 Εισαγωγή στην βελτιστοποίηση με Στρατηγικές Εξέλιξης

Οι Στρατηγικές Εξέλιξης (Evolution Strategies - ES) είναι μία από τις σημαντικότερες εξελικτικές μεθόδους βελτιστοποίησης. Αναπτύχθηκαν τη δεκαετία του

1970 αρχικά από τον I. Rechenberg (1973) και στη συνέχεια από τον H.P. Schwefel και την ερευνητική του ομάδα (1981). Αρχικά εφαρμόστηκαν σε μαθηματικά προβλήματα βελτιστοποίησης ενώ στη συνέχεια η χρήση τους επεκτάθηκε και στον χώρο του βέλτιστου σχεδιασμού των κατασκευών. Η μέθοδος των ES μιμείται τη βιολογική εξέλιξη στη φύση, όπως αυτή περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο, και έχει δύο χαρακτηριστικά τα οποία την κάνουν να διαφέρει από τους συμβατικούς αλγορίθμους βελτιστοποίησης:

- Στη θέση των συνήθων αιτιοκρατικών (ντετερμινιστικών) τελεστών, η μέθοδος των ES χρησιμοποιεί τυχατικούς τελεστές: Μετάλλαξη (mutation), ανασυνδυασμό (recombination) και επιλογή (selection).
- Αντί της διερεύνησης ενός σημείου σχεδιασμού σε κάθε βήμα της διαδικασίας βελτιστοποίησης, η μέθοδος των ES δουλεύει ταυτόχρονα με έναν πληθυσμό σημείων σχεδιασμού μέσα στο πεδίο αναζήτησης.

Οι ES είναι ιδιαίτερα απλές μέθοδοι στην υλοποίηση και εφαρμογή τους και μπορούν να δώσουν λύση σε πολύπλοκα προβλήματα βελτιστοποίησης με συνεχείς, διακριτές ή και μεικτές μεταβλητές σχεδιασμού. Το βασικό πλεονέκτημα των μεθόδων είναι ότι λόγω της τυχαμικότητας του τρόπου έρευνας έχουν μεγαλύτερες πιθανότητες για την εύρεση του απόλυτα βέλτιστου σχεδιασμού σε σχέση με τις μαθηματικές μεθόδους, στις οποίες η αναζήτηση διενεργείται μέσω συγκεκριμένων νομοτελειακών διαδικασιών. Ένα επίσης σημαντικό πλεονέκτημα των ES είναι η φυσική τους παραλληλία, η οποία οφείλεται στην ανεξαρτησία των υπό εξέταση σχεδιασμών μεταξύ τους σε κάθε βήμα της διαδικασίας βελτιστοποίησης, και που έχει ως αποτέλεσμα την αποδοτικότερη εφαρμογή τους σε παράλληλο υπολογιστικό περιβάλλον.

Το εύρος των προβλημάτων στα οποία οι ES αποδεικνύονται αποτελεσματικοί είναι μεγάλο. Ειδικά σε δύσκολα προβλήματα βέλτιστου σχεδιασμού με πολλά τοπικά ελάχιστα ή με πολλές αντικρουόμενες αντικειμενικές συναρτήσεις, οι ES υπερτερούν σαφέστατα των μαθηματικών μεθόδων οι οποίες αδυνατούν πολλές φορές να δώσουν αποδεκτή λύση στο πρόβλημα. Βέβαια, ο τυχαμικός τρόπος αναζήτησης που έχουν υιοθετήσει οι ES έχει το μειονέκτημα του αργού σχετικά ρυθμού σύγκλισης σε σχέση με τις μαθηματικές μεθόδους, με αποτέλεσμα να απαιτείται μεγάλος αριθμός επαναλήψεων της διαδικασίας βελτιστοποίησης για την εύρεση του βέλτιστου σχεδιασμού. Το κόστος όμως κάθε μίας από

αυτές είναι σχετικά μικρό, αφού δεν απαιτείται η χρονοβόρα διαδικασία της ανάλυσης ευαισθησίας για τον υπολογισμό παραγώγων.

Η μέθοδος των Στρατηγικών Εξέλιξης μπορεί να χωριστεί γενικά σε δύο κατηγορίες:

- (i) Τις Στρατηγικές Εξέλιξης δύο μελών (2 - ES), και
- (ii) Τις Στρατηγικές Εξέλιξης πολλών μελών (M - ES)

2.3 Γεννήτριες τυχαίων αριθμών

Όπως αναφέρθηκε, αλλά και θα φανεί ξεκάθαρα στις επόμενες παραγράφους, η τυχηματικότητα είναι μία από τις βασικότερες αρχές στις οποίες στηρίζονται οι Στρατηγικές Εξέλιξης, αλλά και οι εξελικτικοί αλγόριθμοι γενικότερα. Κατά καιρούς έχουν προταθεί, ελεγχθεί και εφαρμοστεί ποικίλες μέθοδοι παραγωγής τυχαίων αριθμών βασισμένες είτε σε τυχαία φαινόμενα είτε σε αιτιοκρατικές (ντετερμινιστικές) διαδικασίες. Παλαιότερα, εφαρμόζονταν ακόμη και χειροκίνητες διαδικασίες βασιζόμενες σε ζάρια, χαρτιά και συσκευές τύπου ρουλέτας, οι οποίες όμως γρήγορα εγκαταλείφθηκαν διότι αποδείχτηκαν πολύ αργές για γενικευμένη χρήση και το κυριότερο, μη ικανές για αναπαραγωγή της ίδιας σειράς τυχαίων αριθμών.

Με την εμφάνιση των ηλεκτρονικών υπολογιστών έγινε δυνατή η μαζική παραγωγή τυχαίων αριθμών, η πιστή αναπαραγωγή τους και η αποθήκευσή τους με σχετική ευκολία. Ένας από τους πρώτους αλγόριθμους που χρησιμοποιήθηκαν για την παραγωγή μίας ακολουθίας “τυχαίων” αριθμών, είναι η μέθοδος του μέσου τετραγώνου (mid-square method). Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή επιλέγεται αρχικά ένας τετραψήφιος αριθμός, υπολογίζεται το τετράγωνό του και στη συνέχεια λαμβάνονται τα τέσσερα μεσαία ψηφία του αποτελέσματος αυτού ως ο νέος ανεξάρτητος τετραψήφιος αριθμός και επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία. Η διαδικασία αυτή ενδέχεται να οδηγήσει σε ανακύκλωση των ίδιων αριθμών μετά από κάποιο σημείο ή και να οδηγηθεί σε πρόωρο τερματισμό, αν εμφανιστούν τέσσερα συνεχόμενα κεντρικά μηδενικά ψηφία.

Η παραγωγή “τυχαίων” αριθμών από έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή, είναι κάτι που συχνά ξενίζει, καθώς έρχεται σε αντίθεση με την πλήρως αιτιοκρατική - ντετερμινιστική φύση της λειτουργίας του. Στην ουσία, ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής δεν έχει τη δυνατότητα παραγωγής τυχαίων αριθμών με την πλήρη έννοια του όρου, αλλά *ψευδοτυχαίων*

(pseudo-random) αριθμών. Οι αριθμοί αυτοί καλούνται έτσι, διότι η σειρά τους μπορεί ανά πάσα στιγμή να αναπαραχθεί αν είναι γνωστές κάποιες αρχικές παράμετροι. Στην πράξη, αυτό που προέχει είναι οι προκύπτοντες από μία τέτοια διαδικασία “τυχαίοι” αριθμοί να είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι και στατιστικώς ανεξάρτητοι. Τα δύο χαρακτηριστικά αυτά είναι που καθορίζουν τελικά την “ποιότητα” μίας γεννήτριας τυχαίων αριθμών.

Μια πιο διαδεδομένη γεννήτρια τυχαίων αριθμών, που καλείται μικτή γεννήτρια ομοιότητας (mixed congruential generator) είναι αυτή που χρησιμοποιεί το ακέραιο μέρος της διαίρεσης δύο ποσοτήτων. Συγκεκριμένα για τον υπολογισμό μιας σειράς τυχαίων αριθμών X_i ($i = 1, 2, \dots, n$), εφαρμόζεται η επαναληπτική σχέση:

$$X_{i+1} = a \cdot X_i + c - m \cdot k_i \quad (2.1)$$

, όπου ο όρος $a > 0$ καλείται *παράγοντας*, ο όρος $c > 0$ *βήμα* και k_i είναι το ακέραιο μέρος της διαίρεσης:

$$k_i = \left\lfloor \frac{a \cdot X_i + c}{m} \right\rfloor \quad (2.2)$$

, όπου $m > 0$. Η τιμή εκκίνησης X_0 καλείται σπόρος (seed) και είναι επιλογή του χρήστη της μεθόδου. Οι ψευδοτυχαίοι αριθμοί που προκύπτουν από τη διαδικασία αυτή αποδεικνύεται ότι είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι, στατιστικώς ανεξάρτητοι και είναι δυνατό να αναπαραχθούν. Για να προκύψουν τυχαίοι αριθμοί U_i στο διάστημα $(0, 1)$ αρκεί (αφού $X_i < m$ για κάθε i), να διαιρεθεί κάθε αριθμός X_i με m :

$$U_i = \frac{X_i}{m} \quad (2.3)$$

Είναι προφανές ότι μία τέτοια σειρά «πίπτει σε βρόγχο», δηλαδή θα επαναλάβει τον εαυτό της μετά από m το πολύ βήματα (αφού $X_i < m$). Η επανάληψη των ίδιων αριθμών είναι αναπόφευκτη και γι’ αυτό η παράμετρος m πρέπει να λαμβάνεται όσο το δυνατόν μεγαλύτερη. Αν η περίοδος μίας τέτοιας σειράς αριθμών είναι ακριβώς ίση με m , τότε λέμε ότι η σειρά έχει πλήρη περίοδο (full period), και αυτό αποδεικνύεται ότι ισχύει κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις για τις τιμές των παραμέτρων.

Οι περισσότεροι υπολογιστές χρησιμοποιούν δυαδικό ή δεκαδικό σύστημα, οπότε μπορούν να επιλεγούν αντίστοιχα οι τιμές $m = 2^\beta$ ή $m = 10^\beta$, όπου ο όρος β αντιστοιχεί στο μήκος λέξης του συγκεκριμένου υπολογιστή. Για έναν δυαδικό υπολογιστή, αποδεικνύεται ότι η επιλογή $m=2^\beta$ εξασφαλίζει πλήρη περίοδο. Καλά στατιστικά αποτελέσματα έχει βρεθεί ότι δίδουν τιμές των παραμέτρων όπως οι εξής: $m = 2^{35}$, $a = 2^7+1$ και $c = 1$. Αντίστοιχα, για έναν δεκαδικό υπολογιστή, για να παραχθεί σειρά τυχαίων αριθμών με πλήρη περίοδο θα πρέπει $m=10^\beta$, η παράμετρος c να είναι θετικός αριθμός και μη διαιρετός από το 2 ή το 5 και ο πολλαπλασιαστής a να είναι της μορφής $a = 10^r + 1$, όπου $r > 1$. Καλά στατιστικά αποτελέσματα δίδουν τιμές των παραμέτρων όπως οι εξής: $a = 101$ και $c = 1$. Στην περίπτωση αυτή, η τιμή εκκίνησης X_0 δεν επηρεάζει τα στατιστικά χαρακτηριστικά της ακολουθίας των τυχαίων αριθμών.

Μια δεύτερη πολύ διαδεδομένη μέθοδος παραγωγής τυχαίων αριθμών είναι η *πολλαπλασιαστική γεννήτρια* (multiplicative generator), σύμφωνα με την οποία οι τυχαίοι αριθμοί X_i , υπακούουν στη σχέση:

$$X_{i+1} = a \cdot X_i - m \cdot k_i \quad (2.4)$$

, όπου k_i είναι το ακέραιο μέρος της σχέσης (2.2). Η τεχνική αυτή αποτελεί ειδική περίπτωση της προηγούμενης, η οποία προκύπτει αν τεθεί $c = 0$ στη σχέση (2.1).

2.4 Στρατηγικές Εξέλιξης δύο μελών (2 - ES)

Οι Στρατηγικές Εξέλιξης με δύο μέλη, οι οποίες συμβολίζονται με (1+1) ES, είναι οι θεμελιώδεις και απλούστερες Στρατηγικές Εξέλιξης. Στο μοντέλο των ES δύο μελών του Rechenberg, χρησιμοποιούνται οι αρχές της μετάλλαξης (μεταλλαγής) και της επιλογής. Το μοντέλο αυτό απεικονίζει τη δημιουργία μίας σειράς διαδοχικών γενεών με τη μορφή μίας επαναληπτικής διαδικασίας η οποία στοχεύει στο να δώσει λύση σε προβλήματα βελτιστοποίησης. Ο βασικός πληθυσμός αποτελείται από δύο μέλη, έναν γονέα και έναν απόγονο. Κάθε μέλος του πληθυσμού χαρακτηρίζεται από τον γονότυπο, ο οποίος αποτελείται από ένα σύνολο γονιδίων. Τα γονίδια στην περίπτωση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης αντιστοιχούν στις μεταβλητές σχεδιασμού.

Παρακάτω θα δούμε πώς εφαρμόζεται η μέθοδος των Στρατηγικών εξέλιξης δύο μελών για την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης με συνεχείς μεταβλητές σχεδιασμού:

$$\begin{aligned}
 F(\vec{s}) &\rightarrow \min, \quad \vec{s} = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}^T \\
 l_i &\leq s_i \leq u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\
 g_j(\vec{s}) &\leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \\
 h_k(\vec{s}) &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, t
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Βήμα 0: Αρχή (initialization). Στο βήμα αυτό, απαιτείται μόνο ο γονότυπος του γονέα. Η θέση κάθε σημείου αναζήτησης προσδιορίζεται γενικά με ένα διάνυσμα θέσης το οποίο αποτελείται από n όρους. Ο γονέας (parent) της πρώτης γενιάς (generation) $g=0$ είναι ένα διάνυσμα $\vec{s}_p^{(0)}$

Βήμα 1: Μετάλλαξη (mutation). Ο γονέας $P^{(g)}$ της γενιάς g με διάνυσμα θέσης $\vec{s}_p^{(g)}$ γεννά έναν απόγονο (offspring) $O^{(g)}$ με διάνυσμα θέσης $\vec{s}_o^{(g)}$ του οποίου ο γονότυπος διαφέρει λίγο από εκείνον του γονέα του. Η διαφοροποίηση αναφέρεται σε επίπεδο γονιδίων, δηλαδή σε επίπεδο μεταβλητών σχεδιασμού και είναι αποτέλεσμα τυχαϊκής διαδικασίας, η δράση της οποίας είναι ανεξάρτητη για κάθε γονίδιο. Δηλαδή κάθε ένας από τους όρους του διανύσματος – απογόνου διαφέρει λίγο από τον αντίστοιχο όρο του διανύσματος – γονέα. Το διάνυσμα – απόγονος (offspring vector) προκύπτει επομένως με την πρόσθεση στο πατρικό διάνυσμα (parent vector) ενός διανύσματος τυχαϊκής αλλαγής $\vec{z}^{(g)}$:

$$\vec{s}_o^{(g)} = \vec{s}_p^{(g)} + \vec{z}^{(g)} \tag{2.6}$$

Ο τελεστής της μετάλλαξης μπορεί να θεωρηθεί, κατ' αντιστοιχία με τα βιολογικά πρότυπα, ως η γενεσιουργός αιτία μικρών σε μέγεθος και συχνότητα τυχαϊκών μεταβολών του γενετικού υλικού. Στόχος της μετάλλαξης είναι η εμφάνιση μικρών διαφοροποιήσεων στους σχεδιασμούς με σχετικά μεγάλη συχνότητα και μεγάλων διαφοροποιήσεων με μικρότερη συχνότητα.

Βήμα 2: Επιλογή (selection). Εξαιτίας του διαφορετικού γονότυπου των δύο μελών του πληθυσμού (γονέας – απόγονος), τα δύο μέλη έχουν διαφορετική ζωτικότητα (ικανότητα επιβίωσης) στο ίδιο περιβάλλον (για την περίπτωση ενός προβλήματος βέλτιστου σχεδιασμού, η συνάρτηση αξιολόγησης F είναι ίδια και για τα δύο μέλη). Μόνο ένα μέλος θα μπορέσει να επιβιώσει στην επόμενη γενιά και να αναπαράγει νέους απογόνους. Το μέλος αυτό θα είναι εκείνο το οποίο έχει αυξημένη ικανότητα επιβίωσης, η οποία εκφράζεται μέσω της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης που είναι διαφορετική για τις δύο πιθανές λύσεις $\vec{s}_p^{(g)}$ και $\vec{s}_o^{(g)}$. Προϋπόθεση είναι φυσικά το μέλος αυτό να ικανοποιεί και τους περιορισμούς του προβλήματος. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε για τον γονέα της επόμενης γενιάς:

$$\vec{s}_p^{(g+1)} = \begin{cases} \vec{s}_o^{(g)}, & \text{όταν } g_j(\vec{s}_o^{(g)}) \leq 0, \quad h_k(\vec{s}_o^{(g)}) = 0, \quad F(\vec{s}_o^{(g)}) \leq F(\vec{s}_p^{(g)}) \\ \vec{s}_p^{(g)}, & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases} \quad (2.7)$$

, όπου $j = 1, \dots, m$ και $k = 1, \dots, t$.

Αφού εκλεγεί το πατρικό διάνυσμα για τη νέα γενιά ($g+1$), η διαδικασία επιστρέφει στο βήμα 1 και η αναζήτηση συνεχίζεται μέχρι τα κριτήρια τερματισμού που έχουν τεθεί να ικανοποιηθούν. Με τα κριτήρια τερματισμού της διαδικασίας θα ασχοληθούμε αναλυτικά στην παράγραφο 2.4.2.

Στο μοντέλο που περιγράφηκε παραπάνω, έχουν γίνει οι ακόλουθες υποθέσεις:

- Το μέγεθος του πληθυσμού παραμένει πάντοτε σταθερό και ίσο με δύο (ένας γονέας και ένας απόγονος).
- Τα μέλη του πληθυσμού έχουν άπειρη διάρκεια ζωής αλλά και απεριόριστη ικανότητα γένεσης απογόνων, δηλαδή αν κάποιο μέλος του πληθυσμού παρουσιάζει ικανότητα επιβίωσης τέτοια ώστε να του επιτρέπει να επικρατεί συνεχώς έναντι των απογόνων του, τότε το μέλος αυτό μπορεί να ζει για άπειρο αριθμό κύκλων και να αναπαράγει άπειρο αριθμό απογόνων.
- Δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ του γονότυπου και του φαινότυπου. Σημειώνεται εδώ ότι στη βιολογία το σύνολο των γονιδίων ενός οργανισμού καθορίζει τον γονότυπό του, ενώ η έκφραση των γονιδίων στον οργανισμό καθορίζει τον φαινότυπο, δηλαδή τη φυσική εμφάνιση του οργανισμού.

- Λαμβάνει χώρα μόνο σημειακή μετάλλαξη, και αυτή σε επίπεδο γονιδίων, σε αντίθεση με τη φύση όπου όπως αναφέραμε υπάρχει και ένας δεύτερος τύπος μετάλλαξης. Θα πρέπει να σημειωθεί επίσης ότι το μέγεθός της είναι ανεξάρτητο από γονίδιο σε γονίδιο.
- Το περιβάλλον καθώς επίσης και τα κριτήρια αξιολόγησης της ικανότητας επιβίωσης παραμένουν αμετάβλητα με το πέρασμα του χρόνου.
- Δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ αρσενικού και θηλυκού φύλου.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, γίνεται σαφές ότι οι αρχές της μετάλλαξης και της επιλογής δεν χρησιμοποιούνται με την πλήρη βιολογική τους έννοια, αλλά έχει γίνει απλά μία κατάλληλη προσομοίωσή τους. Στο βιβλίο “Evolutionstrategie” ο Rechenberg (1973) εξετάζει με μεγαλύτερη λεπτομέρεια την αντιστοιχία μεταξύ της βιολογικής διαδικασίας εξέλιξης και του προβλήματος βελτιστοποίησης.

Το τυχαίο διάνυσμα $\bar{Z}^{(g)}$ όπως είδαμε, αποτελεί τον πυρήνα της διαδικασίας γένεσης των απογόνων. Το ερώτημα λοιπόν που τίθεται είναι ποιος θα πρέπει να είναι ο τρόπος επιλογής του διανύσματος αυτού ώστε να προσεγγίζονται με μεγαλύτερη πιστότητα τα χαρακτηριστικά του φαινομένου της μετάλλαξης στη φύση και να οδηγούμαστε με μεγαλύτερη ασφάλεια και ταχύτητα στο βέλτιστο. Στη φύση η διαδικασία της μετάλλαξης νοείται ως ένα τυχαίο γεγονός το οποίο λαμβάνει χώρα σπάνια. Ο Rechenberg στην προσπάθειά του να εντάξει τη διαδικασία μετάλλαξης στην τεχνική των Στρατηγικών Εξέλιξης, την προσομοίωσε με ένα άθροισμα πολλών ανεξάρτητων τυχαίων γεγονότων βασισμένο σε μία πιθανοτική κατανομή, σύμφωνα με την οποία μικρές αλλαγές συμβαίνουν συχνά, ενώ μεγάλες σπανίως. Για να διατηρηθεί κάποια αναλογία με τη διαδικασία εξέλιξης που ακολουθείται στη φύση, πρέπει να τεθούν οι δύο ακόλουθες απαιτήσεις:

- (i) Η μέση τιμή ξ_i των παραγόμενων τυχαίων αριθμών z_i πρέπει να είναι ίση με το μηδέν.
- (ii) Η διασπορά σ_i^2 , δηλαδή η μέση απόκλιση από τη μέση τιμή, πρέπει να είναι σχετικά μικρή.

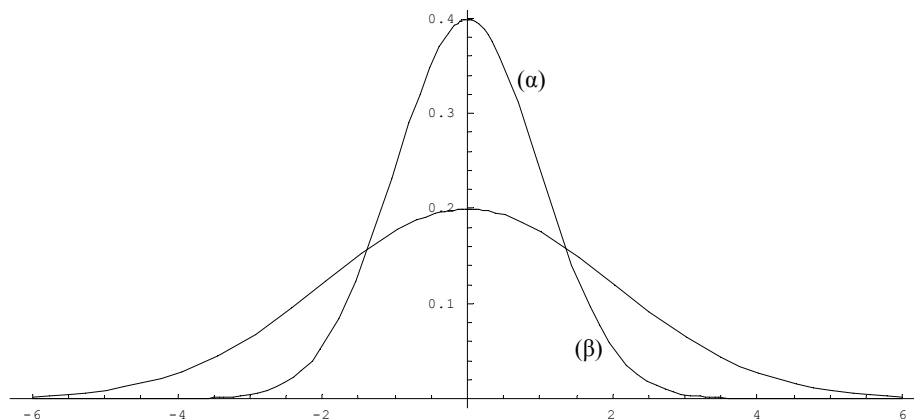
Υπάρχουν πολλές πιθανοτικές κατανομές οι οποίες εμφανίζουν τα παραπάνω χαρακτηριστικά. Στην περίπτωση των συνεχών προβλημάτων βελτιστοποίησης, μπορεί να

χρησιμοποιηθεί η κανονική κατανομή (κατανομή Gauss ή Γκαουσιανή κατανομή) η οποία συμβολίζεται με $N(\xi_i, \sigma_i^2)$. Λέμε ότι η συνεχής τυχαία μεταβλητή z_i ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους ξ_i, σ_i όταν έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την

$$p(z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{(z_i - \xi_i)^2}{2\sigma_i^2}\right) \quad (2.8)$$

Η παραπάνω σχέση αναφέρεται γενικά στην κατανομή $N(\xi_i, \sigma_i^2)$. Αν η μέση τιμή ξ_i λάβει την τιμή μηδέν, τότε έχουμε τη ζητούμενη κατανομή $N(0, \sigma_i^2)$. Μένει να καθοριστούν οι παράμετροι σ_i οι οποίες αντιστοιχούν στις τυπικές αποκλίσεις των όρων z_i του τυχαίου διανύσματος $\bar{z}^{(g)}$. Σε αναλογία με τις ντετερμινιστικές μεθόδους βελτιστοποίησης, οι παράμετροι σ_i μπορούν να ονομαστούν *μήκη βήματος* της διαδικασίας, εφόσον αντιπροσωπεύουν τις μέσες τιμές των μηκών των τυχαίων βημάτων.

Στο σχήμα 2.1 που ακολουθεί, παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις δύο κανονικών κατανομών, της τυποποιημένης κανονικής κατανομής $N(0, 1)$ και της κατανομής $N(0, 4)$.



Σχήμα 2.1. Κανονικές κατανομές $N(\xi, \sigma^2)$:

(α) Τυποποιημένη κατανομή $N(0, 1)$, (β) Κατανομή $N(0, 4)$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σχέση 2.8), έχει κορυφή το σημείο $(\xi, 1/\sqrt{2\pi}\sigma)$ και είναι συμμετρική ως προς τον κατακόρυφο άξονα τον διερχόμενο από το ξ . Στο διάστημα $(\xi-3\sigma, \xi+3\sigma)$, όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα, περιέχονται σχεδόν όλες οι “πιθανές” τιμές. Πράγματι, $P(|X - \mu| > 3\sigma) \cong 0.3\%$

2.4.1 Προσαρμογή του μήκους βήματος

Στην περίπτωση των ντετερμινιστικών τεχνικών αναζήτησης του βέλτιστου, τόσο η διεύθυνση της αναζήτησης όσο και το μήκος βήματος ορίζονται με συγκεκριμένο νομοτελειακό τρόπο, ο οποίος βασίζεται στην πληροφορία που υπάρχει αλλά και στις υποθέσεις οι οποίες γίνονται για την τοπολογία της αντικειμενικής συνάρτησης. Αντίθετα, στην περίπτωση των Στρατηγικών Εξέλιξης η διεύθυνση είναι καθαρά τυχαία ενώ το μήκος βήματος είναι μερικώς ντετερμινιστικά ορισμένο, εφόσον η τυπική απόκλιση έχει καθοριστεί από τον μελετητή.

Σε όλες τις μεθόδους βελτιστοποίησης πάντως, ντετερμινιστικές ή τυχηματικές, η επιλογή του μήκους βήματος είναι ένα από τα σημαντικότερα θέματα για την πορεία της διαδικασίας. Ο λόγος είναι προφανής: αν το μήκος βήματος είναι πολύ μικρό, τότε η μέθοδος θα απαιτήσει έναν πολύ μεγάλο αριθμό επαναλήψεων έως ότου συγκλίνει, ενώ αν το μήκος βήματος είναι πολύ μεγάλο τότε είναι πιθανό σε κάποιο βήμα της διαδικασίας να προσεγγιστεί το καθολικό βέλτιστο αλλά σε κάποιο από τα επόμενα βήματα η αναζήτηση να απομακρυνθεί από αυτό.

Σε δύσκολα προβλήματα βέλτιστου σχεδιασμού, το μήκος βήματος πρέπει να τροποποιείται συνεχώς ώστε η μέθοδος να παραμένει επαρκώς αποτελεσματική σε κάθε βήμα της διαδικασίας βελτιστοποίησης. Ο Rechenberg σε μία πολυπαραμετρική διερεύνηση με τη μέθοδο των (1+1)ES σε δύο διαφορετικά μοντέλα αντικειμενικών συναρτήσεων (αυτό της σφαίρας και αυτό του διαδρόμου) αναζήτησε για το κάθε ένα από αυτά τη βέλτιστη τιμή του μήκους βήματος σ^* , ώστε να έχει τη μέγιστη δυνατή ταχύτητα σύγκλισης. Με αυτόν τον τρόπο κατάφερε να έχει για κάθε ένα από τα δύο αυτά μοντέλα μέγιστη πιθανότητα επιτυχιών, όπου η πιθανότητα επιτυχιών ορίζεται ως το ποσοστό των περιπτώσεων για τις οποίες ο απόγονος παρουσιάζεται επιβιωσιμότερος του γονέα. Η παράμετρος αυτή είναι ανεξάρτητη από την απόσταση της εκάστοτε λύσης από τη βέλτιστη λύση. Βασισμένος στην έρευνά του αυτή διατύπωσε τον *1/5 κανόνα των επιτυχιών* (1/5 success rule) ο οποίος αποτελεί μια τεχνική διόρθωσης του μήκους βήματος. Σύμφωνα με τον κανόνα αυτόν, οι επιτυχίες είναι καλό να διατηρούνται στα επίπεδα του 1/5 και επομένως:

“Αν η *συχρότητα* (ή *πιθανότητα*) *επιτυχιών* ρ η οποία ορίζεται ως ο λόγος των επιτυχιών μεταλλάξεων προς τον συνολικό αριθμό των μεταλλάξεων (γενεών), είναι

μεγαλύτερη του $1/5$, τότε η τιμή της διασποράς σ^2 πρέπει να αυξηθεί, αν είναι μικρότερη του $1/5$ πρέπει να μειωθεί, ενώ αν είναι ίση προς $1/5$ πρέπει να παραμείνει σταθερή.”

Ο κανόνας αυτός μπορεί να διατυπωθεί μαθηματικά ως εξής:

$$\sigma_N = \begin{cases} \sigma_E / C, & \text{αν } \rho > 1/5 \\ \sigma_E \cdot C, & \text{αν } \rho < 1/5 \\ \sigma_E, & \text{αν } \rho = 1/5 \end{cases} \quad (2.9)$$

Η παράμετρος C λαμβάνει την τιμή $C=0.85$. Σε πολλά προβλήματα ο κανόνας αυτός αποδεικνύεται ιδιαίτερα αποτελεσματικός διατηρώντας σε όλες τις επαναλήψεις της μεθόδου τη μεγαλύτερη δυνατή πιθανότητα επιτυχιών. Σε μία πιο προγραμματιστική μορφή ο κανόνας μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

“Μετά από n μεταλλάξεις ελέγχεται το πλήθος των επιτυχιών στις προηγούμενες $10n$ μεταλλάξεις. Αν ο αριθμός που προκύπτει είναι μικρότερος του $2n$, τα μήκη βήματος πολλαπλασιάζονται με την παράμετρο C , ενώ αν είναι μεγαλύτερος του $2n$ διαιρούνται με C . Αν είναι ίσος προς $2n$, τότε τα μήκη βήματος παραμένουν αμετάβλητα.”

Ο κανόνας του ενός πέμπτου όπως διατυπώθηκε παραπάνω, μας δίνει τη δυνατότητα ελέγχου του βήματος ή αλλιώς του μεγέθους της τυχαίας τροποποίησης, αυξάνοντας ή μειώνοντας τις παραμέτρους σ_i , ανάλογα με τη συμπεριφορά του όλου συστήματος. Θα ήταν όμως προτιμότερο να υπάρχει διαβάθμιση της τιμής των σ_i ανάλογα με τη συμπεριφορά της κάθε μεταβλητής σ_i ανεξαρτήτως των υπολοίπων. Μία τέτοια διαδικασία ακολουθείται στις πολυμελείς τεχνικές των ES, όπως θα δούμε σε επόμενη παράγραφο.

2.4.2 Κριτήρια τερματισμού

Σε μία επαναληπτική διαδικασία βέλτιστου σχεδιασμού, όπως αυτή της μεθόδου των ES δύο μελών, είναι απαραίτητη η ύπαρξη κάποιων κανόνων βάσει των οποίων η διαδικασία θα τερματίζεται. Οι κανόνες αυτοί πρέπει να είναι τέτοιοι ώστε να συνδυάζουν αποτελεσματικά δύο αντιφατικά μεταξύ τους χαρακτηριστικά. Πρέπει αφενός να επιτυγχάνουν τον τερματισμό της διαδικασίας αφού πρώτα γίνει η εύρεση του ζητούμενου,

δηλαδή αφού έχουν εντοπιστεί οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού για τις οποίες η αντικειμενική συνάρτηση εμφανίζει τη βέλτιστη τιμή της, και αφετέρου ο όλος υπολογισμός να πραγματοποιείται σε εύλογο αριθμό επαναλήψεων.

Τα μήκη βήματος, αναπροσαρμοζόμενα βάση του κανόνα $1/5$, από τη στιγμή που έχει προσεγγιστεί η θέση του καθολικού βέλτιστου οδηγούνται σε συνεχώς μικρότερες τιμές, καθώς οι επιτυχίες μειώνονται. Συνεπώς, ένα κριτήριο σύγκλισης το οποίο χρησιμοποιείται συχνά είναι το εξής:

“Όταν το μήκος βήματος γίνει μηδέν, γεγονός που συνεπάγεται μηδενικές αλλαγές στις τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού (οπότε παρατηρείται μηδενική βελτίωση και στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης), τότε η διαδικασία θα τερματίζεται.”

Ο παραπάνω κανόνας γίνεται πιο αποτελεσματικός αν αντί για το μηδέν, τεθεί ως τελική τιμή των μηκών βήματος μία μικρή (κοντά στο μηδέν) πεπερασμένη τιμή. Ο κανόνας αυτός όμως, έχει το σοβαρό μειονέκτημα ότι τα μήκη βήματος λαμβάνουν συχνά μικρές τιμές όχι μόνο στην περίπτωση που έχει εντοπιστεί η περιοχή του καθολικού βέλτιστου αλλά και όταν έχει εντοπιστεί η περιοχή ενός τοπικού βέλτιστου. Συνεπώς η απαίτηση $\sigma < \varepsilon$ ή $\|\vec{s}^{(g)} - \vec{s}^{(g-1)}\| < \varepsilon$ δεν εγγυάται τη σύγκλιση στο καθολικό βέλτιστο πάντοτε, αλλά οδηγεί συχνά σε πρόωρη σύγκλιση.

Ένα δεύτερο κριτήριο σύγκλισης είναι ο έλεγχος της μεταβολής της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης, $\Delta F = F(\vec{s}^{(g-1)}) - F(\vec{s}^{(g)})$. Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό, η διαδικασία τερματίζεται όταν η απόλυτη τιμή της διαφοράς ΔF γίνει μηδέν ή μικρότερη ενός ορίου. Όμως και πάλι, υπάρχει ο κίνδυνος το κριτήριο αυτό να ικανοποιηθεί σε κάποιες θέσεις μακριά από το καθολικό βέλτιστο, αν η περιοχή αναζήτησης τυχαίνει να είναι σχεδόν επίπεδη. Για την αποφυγή επομένως του φαινομένου της πρόωρης σύγκλισης, βάση του κανόνα του $1/5$, αυξάνονται οι τιμές των σ^2 και έτσι η διαφορά των τιμών των αντικειμενικών συναρτήσεων ΔF μεταξύ δύο επιτυχημένων δοκιμών αυξάνεται κατά μέσο όρο. Η διαδικασία τερματίζεται όταν:

$$F(\vec{s}^{(g-\Delta g)}) - F(\vec{s}^{(g)}) \leq \varepsilon_c \quad (2.10)$$

$$\frac{F(\vec{s}^{(g-\Delta g)}) - F(\vec{s}^{(g)})}{F(\vec{s}^{(g)})} \leq \varepsilon_d \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_d} [F(\vec{s}^{(g-\Delta g)}) - F(\vec{s}^{(g)})] \leq F(\vec{s}^{(g)}) \quad (2.11)$$

, όπου $\Delta g \geq 20n$ και $\varepsilon_c > 0$ ή $1 + \varepsilon_d > 1$, επιλέγονται ανάλογα με την υπολογιστική ακρίβεια που απαιτείται για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Η συνθήκη $\Delta g \geq 20n$, όπου n το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού, υπάρχει ώστε να εξασφαλιστούμε από την εξαιρετική περίπτωση κατά την οποία η τυπική απόκλιση έχει στο διάστημα ελέγχου μειωθεί ή έχει αυξηθεί κατά τον παράγοντα $(0.85)^{\pm 20} \cong (1/25)^{\pm 1}$, σύμφωνα με τον κανόνα του 1/5. Αυτό θα εμποδίσει τον τερματισμό της διαδικασίας λόγω ξαφνικής αλλαγής των μεταβλητών.

2.5 Στρατηγικές Εξέλιξης πολλών μελών (M - ES)

Στις Στρατηγικές Εξέλιξης με δύο μέλη, ο βασικός πληθυσμός αποτελείται από δύο άτομα – έναν γονέα και έναν απόγονο. Για να επιτευχθεί καλύτερη προσομοίωση της διαδικασίας εξέλιξης, όπως αυτή πραγματοποιείται στη φύση, και με απώτερο σκοπό την ταχύτερη σύγκλιση προς το καθολικό βέλτιστο, οι ερευνητές ανέπτυξαν τις Στρατηγικές Εξέλιξης πολλών μελών. Για τη δημιουργία των ES πολλών μελών, τη βάση αποτέλεσαν οι ES των δύο μελών. Υπάρχουν τρεις τρόποι αύξησης του πλήθους των μελών του πληθυσμού, σε σχέση με την απλή μέθοδο των (1+1)ES:

(i) Αύξηση του πλήθους των γονέων. Η αντίστοιχη μέθοδος συμβολίζεται με $(\mu+1)$ ES, όπου μ το πλήθος των γονέων, και προτάθηκε από τον Rechenberg. Στην περίπτωση της τεχνικής αυτής, ο πληθυσμός αποτελείται από $\mu+1$ μέλη, μ γονείς και έναν απόγονο. Η επιλογή γίνεται μεταξύ των μ επικρατέστερων από τα $\mu+1$ συνολικά μέλη του πληθυσμού.

(ii) Αύξηση του πλήθους των απογόνων. Η αντίστοιχη μέθοδος συμβολίζεται με $(1+\lambda)$ ES, όπου λ το πλήθος των απογόνων. Στην περίπτωση αυτή, ο πληθυσμός αποτελείται από $1+\lambda$ μέλη, έναν γονέα και λ απογόνους. Στη φάση της επιλογής, επιλέγεται το επικρατέστερο από τα $1+\lambda$ μέλη του πληθυσμού, το οποίο θα αποτελέσει τον γονέα για την επόμενη γενιά.

(iii) Αύξηση του πλήθους των γονέων και των απογόνων. Η αντίστοιχη μέθοδος συμβολίζεται με $(\mu+\lambda)$ ES, όπου μ , λ το πλήθος των γονέων και των απογόνων αντίστοιχα.

Από τα $\mu + \lambda$ μέλη του πληθυσμού, επιλέγονται στην περίπτωση αυτή τα μ επικρατέστερα, τα οποία θα αποτελέσουν τους γονείς της επόμενης γενιάς.

Μία παραλλαγή της τεχνικής $(\mu + \lambda)$ ES είναι η τεχνική (μ, λ) ES, όπου $\lambda > \mu$. Η μέθοδος αυτή αποτελεί ένα πιο πιστό βιολογικό αντίγραφο, καθώς θέτει περιορισμούς όσον αφορά τη διάρκεια ζωής των μελών του πληθυσμού. Συγκεκριμένα, στις (μ, λ) ES κάθε μέλος έχει διάρκεια ζωής ίση με μία γενιά και επομένως δυνατότητα να αναπαράγει απογόνους μία και μόνο φορά. Οι μ γονείς θεωρείται ότι “πεθαίνουν” αφού αναπαράγουν τους απογόνους τους και επομένως στο στάδιο της επιλογής μετέχουν μόνο οι λ απόγονοι έστω και αν μερικοί από αυτούς έχουν μικρότερη ζωτικότητα από κάποιον γονέα τους. Η επίδραση της τυχηματικότητας στην περίπτωση αυτή είναι μεν αυξημένη, με όλες τις ευεργετικές συνέπειες που έχει κάτι τέτοιο όσον αφορά την εύρεση του καθολικού ελαχίστου, η σύγκλιση όμως γίνεται ακόμη πιο αργή και η όλη διαδικασία πιο χρονοβόρα. Οι (μ, λ) ES χρησιμοποιούνται κυρίως σε δυναμικά προβλήματα ή σε προβλήματα στα οποία η αντικειμενική συνάρτηση έχει πολύπλοκη μορφή. Στη βιβλιογραφία οι δύο μέθοδοι $(\mu + \lambda)$ ES και (μ, λ) ES αναφέρονται συχνά ως “*plus strategy*” και “*comma strategy*”, αντίστοιχα.

Παρακάτω θα δούμε πώς εφαρμόζεται η μέθοδος των Στρατηγικών Εξέλιξης πολλών μελών στη γενική περίπτωση των μ γονέων και λ απογόνων, για την επίλυση του συνεχούς προβλήματος βελτιστοποίησης των σχέσεων (2.5).

Βήμα 0: Αρχή (initialization). Ο αρχικός πληθυσμός αποτελείται από μ μέλη. Κάθε μέλος του πληθυσμού χαρακτηρίζεται από τον γονότυπό του ο οποίος αποτελείται από n γονίδια. Τα γονίδια καθορίζουν τη ζωτικότητα του μέλους η οποία εκφράζεται μέσω της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης F . Ο πληθυσμός της αρχικής γενιάς ($g=0$), μπορεί να επιλεγεί είτε με τυχαίο τρόπο, είτε από τον σχεδιαστή, αν ο τελευταίος θέλει για κάποιο λόγο να ορίσει ο ίδιος το σημείο έναρξης της αναζήτησης. Σε κάθε περίπτωση πάντως, κάθε ένα από τα μ μέλη του πληθυσμού πρέπει να ικανοποιεί τους περιορισμούς του προβλήματος.

Βήμα 1: Αναπαραγωγή (reproduction). Κάθε γονέας μπορεί να θεωρηθεί ότι παράγει κατά μέσο όρο μ/λ απογόνους, ώστε τελικά να παραχθούν λ νέα μέλη. Τα μέλη αυτά διαφέρουν λίγο σε επίπεδο γονότυπου από τους γονείς τους. Ο αριθμός των γονιδίων παραμένει φυσικά ο ίδιος για κάθε μέλος του πληθυσμού σε όλες τις επόμενες γενιές. Κάθε απόγονος παράγεται μέσω των τελεστών ανασυνδυασμού και μετάλλαξης και για να

αποτελέσει ενεργό απόγονο του πληθυσμού πρέπει να ικανοποιεί τους ανισοτικούς και ισοτικούς περιορισμούς του προβλήματος. Ενεργός ονομάζεται κάθε απόγονος που είναι αποδεκτός και επομένως επιτρέπεται να συμμετάσχει στο επόμενο βήμα της μεθόδου. Στην διαχείριση των περιορισμών θα αναφερθούμε εκτενέστερα στην παράγραφο 2.7. Ο τελεστής της μετάλλαξης επιδρά αντίστοιχα με όσα αναφέρθηκαν στις ES δύο μελών, ενώ στον τελεστή του ανασυνδυασμού θα αναφερθούμε αναλυτικά σε επόμενη παράγραφο (2.5.1).

Βήμα 2: Επιλογή (selection). Η διαδικασία της επιλογής στις ES πολλών μελών πραγματοποιείται γενικά αντίστοιχα με όσα αναφέρθηκαν στις ES δύο μελών. Όμως, όπως προειπώθηκε, υπάρχει διάκριση ανάλογα με το σχήμα των ES πολλών μελών που χρησιμοποιείται, $(\mu+\lambda)$ ή (μ,λ) :

(i) **$(\mu+\lambda)$ ES.** Τα καλύτερα μ μέλη εκ των $\mu+\lambda$ μελών επιλέγονται για να αποτελέσουν τους γονείς της επόμενης γενιάς.

(ii) **(μ, λ) ES.** Τα καλύτερα μ μέλη εκ των λ νέων μελών ($\mu < \lambda$) επιλέγονται για να αποτελέσουν τους γονείς της επόμενης γενιάς.

Αφού εκλεγούν τα πατρικά διανύσματα για τη νέα γενιά ($g+1$), η διαδικασία επιστρέφει στο βήμα 1 και η αναζήτηση συνεχίζεται μέχρι τα κριτήρια τερματισμού που έχουν τεθεί να ικανοποιηθούν.

2.5.1 Τελεστής ανασυνδυασμού

Όπως είδαμε, η κύρια διαφοροποίηση των τεχνικών ES πολλών μελών σε σχέση με την τεχνική ES των δύο μελών, έγκειται στη χρήση ενός νέου τελεστή, που ονομάζεται τελεστής ανασυνδυασμού και ο οποίος δρα πριν από εκείνον της μετάλλαξης. Η λειτουργία του τελεστή αυτού γίνεται γενικά σε δύο στάδια:

(i) Επιλέγονται τυχαία ρ γονείς ($1 \leq \rho \leq \mu$) από τον πληθυσμό των γονέων της τρέχουσας γενιάς.

(ii) Οι ρ γονείς που επιλέχθηκαν συνδυάζονται για την δημιουργία ενός προσωρινού απογόνου. Ο τελικός απόγονος θα προκύψει με τη μετέπειτα επίδραση του τελεστή

μετάλλαξης πάνω στον προσωρινό αυτόν απογόνο. Αυτή η διαδικασία πραγματοποιείται ανεξάρτητα για κάθε έναν από τους λ τελικούς απογόνους.

Κατά καιρούς έχουν παρουσιαστεί ποικίλοι τρόποι ανασυνδυασμού των γονέων για τη δημιουργία των προσωρινών απογόνων. Παρακάτω θα περιγράψουμε τους πέντε σημαντικότερους από τους τρόπους αυτούς, οι οποίοι χρησιμοποιήθηκαν και στα πλαίσια των εφαρμογών της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Έστω ότι $\vec{s}_\pi = [s_{\pi 1}, s_{\pi 2}, \dots, s_{\pi n}]^T$ είναι το ζητούμενο διάνυσμα θέσης του προσωρινού απογόνου. Αρχικά επιλέγονται τυχαία δύο γονείς a , b , στους οποίους αντιστοιχούν τα διανύσματα θέσης $\vec{s}_a = [s_{a1}, s_{a2}, \dots, s_{an}]^T$ και $\vec{s}_b = [s_{b1}, s_{b2}, \dots, s_{bn}]^T$, αντίστοιχα. Σύμφωνα με αυτούς τους συμβολισμούς, και ανάλογα με την περίπτωση του σχήματος ανασυνδυασμού που εφαρμόζουμε για το εκάστοτε πρόβλημα, έχουμε:

(i) Όχι ανασυνδυασμός.

(ii) $s_{\pi i} = s_{ai}$ ή s_{bi} , με τυχαία εκλογή, για κάθε μεταβλητή σχεδιασμού i . Κάθε ένα από τα n γονίδια του προκύπτοντος προσωρινού απογόνου, θα είναι ίδιο με το αντίστοιχο γονίδιο του γονέα a ή του γονέα b , που συμμετείχαν στη διαδικασία ανασυνδυασμού.

(iii) $\vec{s}_\pi = \frac{1}{2}(\vec{s}_a + \vec{s}_b)$. Κάθε γονίδιο του προσωρινού απογόνου θα προκύψει ως “ημιάθροισμα” των αντίστοιχων γονιδίων των δύο γονέων.

(iv) $s_{\pi i} = s_{ji}$, όπου s_{ji} είναι η τιμή της μεταβλητής σχεδιασμού i του γονέα j , ο οποίος επιλέγεται τυχαία από τους μ γονείς, για κάθε τιμή του i . Κάθε ένα από τα n γονίδια του προσωρινού απογόνου, θα είναι ίδιο με το αντίστοιχο γονίδιο ενός από τους μ γονείς.

(v) $s_{\pi i} = s_{ai}$ ή s_{ji} , με τυχαία εκλογή, για κάθε τιμή του i . Κάθε ένα από τα γονίδια του προσωρινού απογόνου, θα είναι ίδιο με το αντίστοιχο γονίδιο είτε του γονέα a , είτε κάποιου άλλου από τους μ γονείς.

(vi) $s_{\pi i} = \frac{1}{2}(s_{ai} + s_{ji})$, για κάθε τιμή του i . Κάθε γονίδιο του προσωρινού απογόνου θα προκύψει ως “ημιάθροισμα” των αντίστοιχων γονιδίων του γονέα a και ενός από τους άλλους μ γονείς.

2.5.2 Αυτοπροσαρμογή των παραμέτρων

Τα μειονεκτήματα της μεθόδου του 1/5 για τον έλεγχο του μήκους βήματος σ της απλής μορφής των (1+1)ES, οδήγησαν τον Schwefel στο να αναζητήσει έναν πιο αξιόπιστο και γενικό τρόπο διόρθωσης των παραμέτρων που μετέχουν στον τελεστή της μετάλλαξης. Ο γονότυπος ενός φυσικού μοντέλου, έχει ενσωματωμένους μηχανισμούς που ελέγχουν τη μεταλλαξιμότητά του. Ο Schwefel μετέφερε την ιδέα αυτή στις Στρατηγικές Εξέλιξης πολλών μελών. Σύμφωνα με την ιδέα αυτή, η τυπική απόκλιση αποτελεί μέρος του κάθε ατόμου και εξελίσσεται και αυτή μέσω του τελεστή μετάλλαξης με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που μεταλλάσσονται και οι μεταβλητές σχεδιασμού. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται *αυτοπροσαρμογή* (self-adaptation) των παραμέτρων.

2.5.3 Κριτήρια τερματισμού

Σύμφωνα με τον Schwefel (1981), η διαδικασία της βελτιστοποίησης των M-ES σε ένα συνεχές πρόβλημα μπορεί να τερματιστεί όταν:

(i) Η απόλυτη ή σχετική διαφορά μεταξύ της καλύτερης και της χειρότερης τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης των γονέων της τρέχουσας γενιάς είναι μικρότερη από μία δεδομένη μικρή τιμή ε_1 .

(ii) Η μέση τιμή των αντικειμενικών συναρτήσεων όλων των γονέων στις τελευταίες K ($\geq 2n$) γενιές έχει βελτιωθεί λιγότερο από μία δεδομένη μικρή τιμή ε_2 .

, όπου n είναι το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού του προβλήματος. Χαρακτηριστικές τιμές των παραπάνω παραμέτρων είναι οι εξής: $\varepsilon_1 \leq 10^{-4}$ και $\varepsilon_2 \leq 10^{-3}$.

2.6 Στρατηγικές εξέλιξης και διακριτός βέλτιστος σχεδιασμός

Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με διακριτές τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού μπορεί όπως έχουμε δει στην παράγραφο 1.2.1 να διατυπωθεί μαθηματικά ως εξής:

$$\begin{aligned}
F(\vec{s}) &\rightarrow \min, \quad \vec{s} = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}^T \\
s_i &\in R_i^d, \quad i = 1, 2, \dots, n \\
g_j(\vec{s}) &\leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \\
h_k(\vec{s}) &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, t
\end{aligned} \tag{2.12}$$

, όπου R_i^d είναι το διακριτό πεδίο τιμών της μεταβλητής σχεδιασμού s_i . Η δομή των Στρατηγικών Εξέλιξης για την αντιμετώπιση ενός προβλήματος βέλτιστου σχεδιασμού με διακριτές παραμέτρους σχεδιασμού παραμένει η ίδια, όπως περιγράφηκε σε προηγούμενες παραγράφους. Ωστόσο, πρέπει να γίνουν κάποιες τροποποιήσεις στους τελεστές μετάλλαξης και ανασυνδυασμού, ώστε οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού που προκύπτουν από αυτούς να ανήκουν στο διακριτό πεδίο τιμών R_i^d της κάθε παραμέτρου σχεδιασμού.

2.6.1 Τελεστής μετάλλαξης

Όπως έχουμε δει σε προηγούμενες παραγράφους, στη φύση, μικρού εύρους μεταλλάξεις συμβαίνουν συχνά ενώ μεγάλου εύρους σπάνια. Στην περίπτωση των προβλημάτων βελτιστοποίησης με συνεχείς παραμέτρους σχεδιασμού, μεταλλάξεις που ακολουθούν αυτόν τον κανόνα μπορούν να παραχθούν εύκολα αν οι όροι του τυχαίου διανύσματος $\vec{Z}^{(g)}$ παραχθούν βάση κατανομών με μέσες τιμές ίσες με το μηδέν και μικρές τιμές των τυπικών αποκλίσεων. Δίνεται έτσι η δυνατότητα σε όλες τις μεταβλητές σχεδιασμού ενός γονέα να μεταλλαχθούν ταυτόχρονα, σε ένα βήμα μετάλλαξης, εφόσον οι αλλαγές αυτές είναι συνήθως μικρές.

Σε προβλήματα όμως με διακριτές μεταβλητές σχεδιασμού, η τυχαία τροποποίηση που λαμβάνει χώρα όταν ο τελεστής μετάλλαξης ενεργήσει σε ένα μέλος του πληθυσμού απαιτείται να οδηγήσει σε μία γειτονική διακριτή τιμή. Οι διαφορές μεταξύ δύο γειτονικών τιμών του διακριτού συνόλου R_i^d είναι συνήθως αρκετά μεγάλες, συνεπώς ο κανόνας μικρού εύρους μετάλλαξης διαταράσσεται όταν όλοι οι n όροι ενός διανύσματος γονέα μεταλλαχθούν ταυτόχρονα, δηλαδή σε ένα βήμα μετάλλαξης. Για τον λόγο αυτό, προτείνεται η μετάλλαξη ορισμένων μόνο μεταβλητών σχεδιασμού (π.χ. πλήθους ℓ) σε κάθε βήμα, η επιλογή των οποίων γίνεται με τυχαίο τρόπο. Αυτό σημαίνει ότι $n-\ell$ το πλήθος όροι του

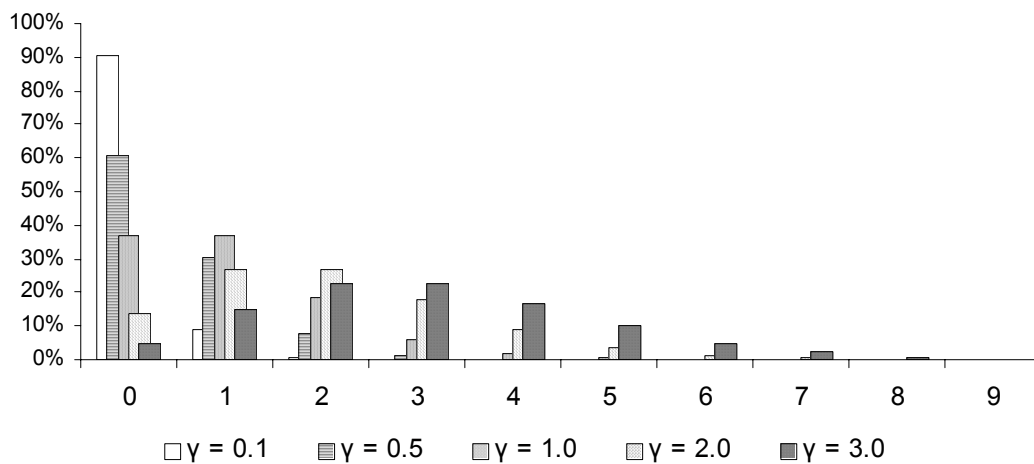
διανύσματος τυχαίας αλλαγής $\vec{z}^{(g)}$ θα έχουν μηδενική τιμή. Σύμφωνα με τα παραπάνω, το τυχαίο διάνυσμα $\vec{z}^{(g)}$, θα δίνεται από τη σχέση:

$$z_i^{(g)} = \begin{cases} \pm (\kappa + 1) \delta s_i, & \text{για τις } \ell \text{ τυχαία επιλεγμένες μ.σ. } (\ell < n) \\ 0 & , \text{για τις υπόλοιπες } n - \ell \text{ μ.σ.} \end{cases} \quad (2.13)$$

, όπου δs_i είναι η διαφορά μεταξύ δύο γειτονικών τιμών του συνόλου των διακριτών τιμών R_i^d , αν θεωρήσουμε ότι παραμένει σταθερή μεταξύ δύο οποιονδήποτε γειτονικών τιμών για κάθε μεταβλητή σχεδιασμού i , και κ είναι ένας ακέραιος τυχαίος αριθμός ο οποίος ακολουθεί την κατανομή Poisson. Λέμε ότι η ακέραια τυχαία μεταβλητή κ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο γ , όταν έχει συνάρτηση μάζας πιθανότητας την:

$$P(\kappa) = \frac{\gamma^\kappa}{\kappa!} e^{-\gamma} \quad (2.14)$$

Η παράμετρος γ εκφράζει την τυπική απόκλιση του τυχαίου αριθμού κ . Για πολύ μικρές τιμές του γ (π.χ. 0.01), ο αριθμός κ λαμβάνει την τιμή μηδέν με πιθανότητα μεγαλύτερη από 99%, ενώ για $\gamma=0.05$, ο αριθμός κ λαμβάνει τη μηδενική τιμή με πιθανότητα περίπου 95% και την τιμή ένα με πιθανότητα περίπου 5%.



Σχήμα 2.2. Κατανομές Poisson για διάφορες τιμές της παραμέτρου γ

Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι όροι του διανύσματος $\bar{z}^{(g)}$ ελέγχονται με βάση την παράμετρο γ . Τα ℓ μέλη του πληθυσμού που θα συμμετέχουν στη διαδικασία της μετάλλαξης επιλέγονται τυχαία με μία ομοιόμορφη κατανομή.

Οι τιμές του μήκους βήματος, σε αντιστοιχία με το πρόβλημα του βέλτιστου σχεδιασμού με συνεχείς μεταβλητές σχεδιασμού, αναπροσαρμόζονται βάση ενός κανόνα ανάλογου με τον κανόνα του 1/5. Αρχικά επιλέγεται μία σχετικά μεγάλη τιμή της διασποράς (συνήθως $\gamma_0=0.01$). Αν μετά από τη δημιουργία της νέας γενιάς δεν έχει επιτευχθεί κάποια βελτίωση στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, τότε η τιμή της διασποράς μειώνεται ενώ σε αντίθετη περίπτωση η τιμή της διασποράς αυξάνεται. Η αύξηση ή μείωση είναι ποσοστιαία και μεγέθους 5-10% της παλαιάς τιμής του γ .

2.6.2 Τελεστής ανασυνδυασμού

Τα σχήματα ανασυνδυασμού για την περίπτωση των συνεχών μεταβλητών σχεδιασμού, όπως παρουσιάστηκαν στην παράγραφο 2.5.1, δεν μπορούν να εφαρμοστούν αυτούσια στην περίπτωση του προβλήματος με διακριτές μεταβλητές σχεδιασμού. Συγκεκριμένα, τα σχήματα (ii) και (v) που αναφέρονται σε ημιαθροίσματα των τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού καθίστανται μη εφαρμόσιμα, καθώς η μέση τιμή δύο διακριτών τιμών του συνόλου R_i^d δεν οδηγεί πάντοτε σε διακριτή τιμή που να ανήκει στο R_i^d . Επομένως, τα σχήματα αυτά πρέπει να τροποποιηθούν.

Τα σχήματα ανασυνδυασμού που εφαρμόζονται για την περίπτωση του διακριτού προβλήματος, χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς της παραγράφου 2.5.1, είναι τα ακόλουθα:

(i) Όχι ανασυνδυασμός.

(ii) $s_{\pi i} = s_{\alpha i}$ ή $s_{\beta i}$

(iii) $s_{\pi i} = s_{ji}$

(iv) $s_{\pi i} = s_{\alpha i}$ ή s_{mi} , όπου s_{mi} είναι η τιμή της μεταβλητής σχεδιασμού i του καλύτερου μέλους του πληθυσμού των μ γονέων της τρέχουσας γενιάς g .

(v) $s_{\pi i} = s_{\alpha i}$ ή s_{ji}

$$(vi) \ s_{\pi i} = s_{mi} \quad \text{ή} \quad s_{ji}$$

2.6.3 Κριτήρια τερματισμού

Για την περίπτωση προβλημάτων βέλτιστου σχεδιασμού με διακριτές μεταβλητές σχεδιασμού προτείνονται τέσσερα κριτήρια τερματισμού. Σύμφωνα με αυτά, η διαδικασία θα τερματιστεί, όταν:

(i) Η εντοπιζόμενη καλύτερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης δεν έχει βελτιωθεί για τις τελευταίες K_I γενιές.

(ii) Η μέση τιμή των αντικειμενικών συναρτήσεων όλων των γονέων βελτιώθηκε στις τελευταίες K_{II} γενιές κατά ποσοστό μικρότερο μιας δεδομένης τιμής ε_b .

(iii) Η σχετική διαφορά μεταξύ της καλύτερης και της μέσης τιμής των αντικειμενικών συναρτήσεων όλων των γονέων στην τρέχουσα γενιά είναι μικρότερη μίας δεδομένης τιμής ε_c .

(iv) Ο λόγος μ_b/μ έχει φτάσει την τιμή ε_d , όπου μ_b είναι το πλήθος των γονέων στην τρέχουσα γενιά με τιμή ίση της καλύτερης που έχει επιτευχθεί.

Χαρακτηριστικές τιμές των παραμέτρων είναι: $\varepsilon_b = 0$, $\varepsilon_c = 10^{-4}$ και $0.5 \leq \varepsilon_d \leq 0.8$.

2.7 Διαχείριση των περιορισμών

Η βασική τεχνική που χρησιμοποιούν οι Στρατηγικές Εξέλιξης για τη διαχείριση των περιορισμών του προβλήματος, ονομάζεται *τεχνική της θανατικής καταδίκης* (death penalty). Σύμφωνα με την απλή αυτή τεχνική, οι μη αποδεκτές λύσεις απλώς απορρίπτονται και ο αλγόριθμος επανεπιλύει το πρόβλημα έως ότου βρει μία αποδεκτή λύση για να συνεχίσει. Το βασικό πλεονέκτημα της τεχνικής αυτής είναι ότι ο όλες οι πιθανές λύσεις σε κάθε βήμα της διαδικασίας είναι αποδεκτές και επομένως δεν υπάρχει περίπτωση ο αλγόριθμος να καταλήξει σε μη αποδεκτή λύση όπως για παράδειγμα μπορεί να συμβεί με τους γενετικούς αλγορίθμους. Από την άλλη όμως, εξαιτίας της μη εκμετάλλευσης των μη αποδεκτών

λύσεων, ο αλγόριθμος γίνεται πιο αργός καθώς καταναλώνεται πολύς υπολογιστικός χρόνος προκειμένου να βρεθεί πάση θυσία αποδεκτή λύση για τη συνέχεια της εξελικτικής διαδικασίας.

2.8 Εφαρμογή των ES στη βελτιστοποίηση κατασκευών

Η εφαρμογή πιθανοτικών μεθόδων βέλτιστου σχεδιασμού σε κατασκευαστικά προβλήματα παραμένει μέχρι σήμερα κάπως περιορισμένη, αν και τα τελευταία χρόνια παρουσιάζεται αύξηση του ενδιαφέροντος γύρω από αυτές. Συνήθως τέτοιου είδους προβλήματα αντιμετωπίζονται με αλγορίθμους μαθηματικού προγραμματισμού. Οι αλγόριθμοι αυτοί απαιτούν μεν λιγότερα βήματα για την ολοκλήρωσή τους και εμφανίζουν γενικά ταχύτερους ρυθμούς σύγκλισης, εμπεριέχουν όμως τη χρονοβόρα διαδικασία του υπολογισμού παραγώγων για την ανάλυση ευαισθησίας. Σε κατασκευαστικά δε προβλήματα, όπου η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί είναι μη γραμμικές συναρτήσεις των μεταβλητών σχεδιασμού και ο χώρος των εφικτών λύσεων είναι μη κυρτός, δυσκολεύονται ιδιαίτερα στον εντοπισμό του καθολικού ελαχίστου.

Οι Στρατηγικές Εξέλιξης από την άλλη, όπως και άλλες πιθανοτικές τεχνικές, αποδεικνύονται ιδιαίτερα αποτελεσματικές σε δύσκολα προβλήματα βέλτιστου σχεδιασμού κατασκευών. Χρειάζονται γενικά περισσότερα βήματα για τον εντοπισμό της βέλτιστης λύσης, δεν απαιτούν όμως ανάλυση ευαισθησίας και επομένως κάθε ένα από τα βήματα αυτά έχει μικρές υπολογιστικές απαιτήσεις. Επίσης, λόγω του τυχαματικού τρόπου διεξαγωγής της αναζήτησης, εμφανίζονται περισσότερο γενικές και αξιόπιστες όσον αφορά την εύρεση του καθολικού ελαχίστου, ενώ λόγω της φυσικής τους παραλληλίας μας παρέχουν τη δυνατότητα πλήρους εκμετάλλευσης των σύγχρονων υπολογιστικών συστημάτων παράλληλης πολυεπεξεργασίας.

Όπως παρατηρήθηκε, το υπολογιστικό κόστος αλλά και η ποιότητα των αποτελεσμάτων της μεθόδου των ES εξαρτάται άμεσα από τον αριθμό των γονέων και των απογόνων που επιλέγουμε. Για προβλήματα βέλτιστου σχεδιασμού κατασκευών η επιλογή πλήθους γονέων και απογόνων κοντά στο πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού δίνει καλά αποτελέσματα, τόσο από άποψη υπολογιστικού κόστους όσο και από άποψη ποιότητας της βέλτιστης λύσης.

Ο αλγόριθμος των ES για τον βέλτιστο σχεδιασμό κατασκευών, συνοψίζεται στα παρακάτω βήματα:

(i) **Εναρκτήριο βήμα.** Επιλέγονται οι μ σχεδιασμοί που θα αποτελέσουν τους γονείς της αρχικής γενιάς ($g=0$).

(ii) **Ανάλυση αρχικών σχεδιασμών.** Ο φορέας αναλύεται, για κάθε έναν από τους μ αρχικούς σχεδιασμούς. Η ανάλυση γίνεται συνηθέστερα με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

(iii) **Έλεγχος περιορισμών.** Ελέγχονται οι περιορισμοί του προβλήματος, βάση των αποτελεσμάτων της ανάλυσης για κάθε έναν από τους αρχικούς σχεδιασμούς. Αν κάποιος σχεδιασμός είναι μη εφικτός, τότε τροποποιείται κατάλληλα και πραγματοποιείται νέα ανάλυση και επανέλεγχος, ώσπου όλοι οι αρχικοί σχεδιασμοί να αποτελούν εφικτούς σχεδιασμούς. Στη συνέχεια, υπολογίζονται οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης, για κάθε αρχικό σχεδιασμό.

(iv) **Γένεση απογόνων.** Δημιουργούνται οι λ σχεδιασμοί των απογόνων.

(v) **Ανάλυση σχεδιασμών.** Ο φορέας αναλύεται, για κάθε έναν από τους σχεδιασμούς – απογόνους.

(vi) **Έλεγχος περιορισμών.** Ελέγχονται οι περιορισμοί του προβλήματος, βάση των αποτελεσμάτων της επίλυσης, για κάθε έναν από τους σχεδιασμούς - απογόνους. Αν κάποιος σχεδιασμός είναι μη εφικτός τότε τροποποιείται κατάλληλα και πραγματοποιείται νέα ανάλυση και επανέλεγχος, ώσπου όλοι οι σχεδιασμοί – απόγονοι να γίνουν εφικτοί. Στη συνέχεια, για κάθε σχεδιασμό υπολογίζονται οι αντίστοιχες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης.

(vii) **Έλεγχος σύγκλισης.** Αν το κριτήριο τερματισμού που έχει επιλεγεί ικανοποιείται, τότε η διαδικασία τερματίζεται

(viii) **Βήμα επιλογής.** Επιλέγονται οι γονείς της επόμενης γενιάς, σύμφωνα με το σχήμα που έχει επιλεγεί, $(\mu+\lambda)$ ή (μ, λ) και η διαδικασία επιστρέφει στο βήμα (iv).

3

Δυναμική ανάλυση

3.1 Δυναμικά φορτία

Ο όρος *δυναμικός* μπορεί να οριστεί απλά ως “μεταβλητός με τον χρόνο”. Με αυτή την έννοια, δυναμικά είναι τα φορτία εκείνα των οποίων το μέγεθος, η διεύθυνση ή η θέση, σε αντίθεση με τα στατικά φορτία, μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου. Η απόκριση μίας κατασκευής σε δυναμική φόρτιση (δηλαδή οι αναπτυσσόμενες τάσεις και παραμορφώσεις) είναι επίσης μεταβλητή με το χρόνο και επομένως δυναμική. Τα δυναμικά φορτία οφείλονται γενικά σε μηχανές, σε κίνηση οχημάτων, σε ανεμοπίεση, στον σεισμό κ.α. Στην πραγματικότητα όλα τα φορτία στη φύση έχουν λίγο ως πολύ δυναμικό χαρακτήρα. Στατική θα μπορούσε να θεωρηθεί μία φόρτιση η οποία αυξάνεται σταδιακά από τη μηδενική στην τελική της τιμή με πολύ αργό ρυθμό, ούτως ώστε οι αναπτυσσόμενες ταχύτητες και επιταχύνσεις να μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες. Έτσι, οι στατικές φορτίσεις είναι στην ουσία μία απλοποιητική παραδοχή που κάνουν οι μελετητές – εφόσον το πρόβλημα τους το επιτρέπει – προκειμένου να κάνουν ευκολότερους τους υπολογισμούς τους.

Τα δυναμικά φορτία διακρίνονται γενικά σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

(i) Τα *ντετερμινιστικά* ή *προκαθορισμένα φορτία*. Είναι τα δυναμικά φορτία των οποίων η χρονική μεταβολή είναι πλήρως καθορισμένη και είναι δυνατό να παρασταθεί με μία συνήθη αναλυτική ή γενικευμένη (Dirac ή Heaviside) συνάρτηση.

(ii) Τα *τυχαία* ή *στοχαστικά φορτία*. Είναι τα δυναμικά φορτία των οποίων η χρονική μεταβολή δεν είναι πλήρως γνωστή, αλλά μπορεί να υπολογιστεί προσεγγιστικά με στατιστικές μεθόδους. Στα φορτία αυτά ανήκει η δυναμική καταπόνηση μίας κατασκευής η οφειλόμενη στη σεισμική κίνηση του εδάφους.

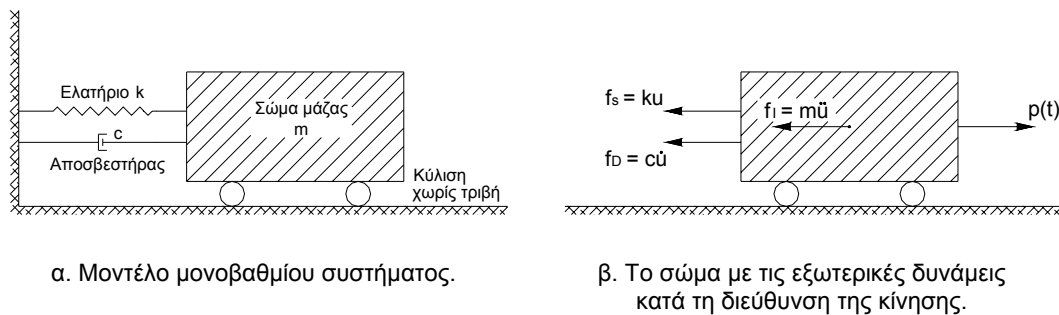
Ένας βασικός διαχωρισμός των ντετερμινιστικών φορτίων είναι σε *περιοδικά* και *μή περιοδικά* ή *απεριοδικά*. Τα περιοδικά φορτία είναι εκείνα των οποίων η χρονική μεταβολή επαναλαμβάνεται διαρκώς η ίδια, μετά από την παρέλευση ενός σταθερού χρονικού διαστήματος T που ονομάζεται *περίοδος* της φόρτισης. Η απλούστερη περιοδική φόρτιση είναι η ημιτονοειδής η οποία καλείται *απλή αρμονική*. Τέτοια φόρτιση είναι χαρακτηριστικό αποτέλεσμα μη ζυγοσταθμίσεως μηχανών με περιστρεφόμενα μέρη. Άλλοι τύποι περιοδικών φορτίσεων συνήθως είναι πιο πολύπλοκοι, όμως μέσω της ανάλυσης Fourier, οποιαδήποτε περιοδική φόρτιση μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα απλών αρμονικών συνιστωσών φορτίσεων και επομένως η ανάλυση αποκρίσεως σε περιοδικές φορτίσεις ακολουθεί γενικά σε κάθε περίπτωση την ίδια διαδικασία. Οι μη περιοδικές φορτίσεις μπορεί να είναι είτε μικρής διάρκειας ωστικές φορτίσεις, όπως για παράδειγμα ένα κύμα ή μία έκρηξη, είτε μεγάλης διάρκειας γενικές μορφές φορτίσεων, όπως λόγου χάρη η σεισμική φόρτιση.

3.2 Μονοβάθμιο σύστημα

Αν και το αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η δυναμική ανάλυση και βελτιστοποίηση πολυβαθμίων συστημάτων, κρίνεται σκόπιμο να γίνει μια σύντομη αναφορά στη θεμελιώδη για τη δυναμική των κατασκευών έννοια του μονοβαθμίου συστήματος, καθώς υπάρχουν πολλές αντιστοιχίες μεταξύ των δύο, ενώ σε πολλές περιπτώσεις η συμπεριφορά ενός πολυβαθμίου συστήματος ανάγεται στη συμπεριφορά ενός πεπερασμένου αριθμού μονοβαθμίων συστημάτων, μέσω κατάλληλων μετασχηματισμών, όπως θα δούμε σε επόμενες παραγράφους.

Μονοβάθμιο είναι ένα σύστημα το οποίο έχει έναν βαθμό ελευθερίας κίνησης. Το πλήθος των βαθμών ελευθερίας κινήσεως μίας κατασκευής ισούται με το πλήθος των ανεξάρτητων συνιστωσών μετακινήσεων (μετατοπίσεων ή στροφών) που απαιτούνται για τον καθορισμό της γεωμετρίας του παραμορφωμένου φορέα σε κάθε χρονική στιγμή της κινήσεως. Ένα τέτοιο σύστημα φαίνεται στο σχήμα 3.1 που ακολουθεί.

Η ολική μάζα του συστήματος περιλαμβάνεται στο στερεό στοιχείο, το οποίο συγκρατείται μέσω κυλίνδρων ώστε να μπορεί να κάνει μόνο κινήσεις μεταφοράς. Η ελαστική αντίσταση στη μετατόπιση παρέχεται από το αβαρές ελατήριο σταθεράς k , ενώ ο μηχανισμός απώλειας ενέργειας παρίσταται από τον αποσβεστήρα c . Ο μηχανισμός εξωτερικού φορτίου που παράγει τη δυναμική απόκριση του συστήματος είναι το μεταβλητό με τον χρόνο φορτίο $p(t)$.



Σχήμα 3.1

Η εξίσωση κίνησης ενός μονοβαθμίου συστήματος μπορεί να προκύψει ως απλή έκφραση της ισορροπίας των δυνάμεων και έχει τη μορφή:

$$f_I + f_D + f_s = p(t) \quad (3.1)$$

, όπου f_I είναι η αδρανειακή δύναμη, f_D η δύναμη αποσβέσεως, f_s η ελαστική δύναμη του ελατηρίου και $p(t)$ είναι η εξωτερική δυναμική φόρτιση. Από την παραπάνω σχέση, με αντικατάσταση των μεγεθών στο αριστερό μέλος, παίρνουμε:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = p(t) \quad (3.2)$$

, όπου m είναι η μάζα του ταλαντούμενου σώματος, k είναι η σταθερά του ελατηρίου, c είναι η σταθερά απόσβεσης του συστήματος και $u(t)$ είναι η μετατόπιση του σώματος από την αρχική θέση ισορροπίας του, ως συνάρτηση του χρόνου t .

Η παραπάνω σχέση αναφέρεται σε ένα εξιδανικευμένο σύστημα, γραμμικό ελαστικό, στο οποίο έχει γίνει η θεώρηση της γραμμικής ιξώδους απόσβεσης. Η απόσβεση γενικά

παριστά τον μηχανισμό απώλειας ενέργειας του συστήματος, ο οποίος είναι ιδιαίτερα πολύπλοκος, μπορεί όμως να προσεγγιστεί σε πολλές περιπτώσεις ικανοποιητικά με τη θεώρηση της γραμμικής ιξώδους συμπεριφοράς. Με το θέμα της απόσβεσης θα ασχοληθούμε εκτενώς στην παράγραφο 3.4.

3.2.1 Ελεύθερη ταλάντωση χωρίς απόσβεση

Θέτοντας $p(t)=0$ στην εξίσωση (3.2), παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση κίνησης ενός μονοβαθμίου συστήματος που εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση, η οποία για συστήματα χωρίς απόσβεση ($c=0$), γίνεται:

$$m \cdot \ddot{u} + k \cdot u = 0 \quad (3.3)$$

Η ελεύθερη ταλάντωση πραγματοποιείται αν διαταραχθεί το σύστημα από τη θέση ισορροπίας του, δηλαδή αν δοθεί σε αυτό μία αρχική μετατόπιση $u(0)$ ή/και μία αρχική ταχύτητα $\dot{u}(0)$, τη χρονική στιγμή μηδέν. Η λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.3), είναι:

$$u(t) = u(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (3.4)$$

, όπου
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.5)$$

Η κίνηση που περιγράφεται από την εξίσωση (3.4) είναι γνωστή ως *απλή αρμονική κίνηση*. Ο χρόνος που απαιτείται ώστε το σύστημα να εκτελέσει έναν κύκλο της απλής αρμονικής ταλάντωσης ονομάζεται *ιδιοπερίοδος ταλάντωσης* του συστήματος, συμβολίζεται με T_n και μετριέται σε δευτερόλεπτα (sec). Η ιδιοπερίοδος συνδέεται με την κυκλική ιδιοσυχνότητα ω_n του συστήματος που εκφράζεται σε rad/sec με τη σχέση:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (3.6)$$

Το σύστημα εκτελεί $1/T_n$ κύκλους σε 1 sec, επομένως η φυσική συχνότητα του συστήματος, που εκφράζεται σε hertz (Hz) είναι:

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (3.7)$$

Τα μεγέθη ω_n , T_n , f_n αποτελούν φυσικές ιδιότητες του συστήματος και εξαρτώνται μόνο από τη μάζα και τη δυσκαμψία της κατασκευής. Γενικά αύξηση της δυσκαμψίας της κατασκευής ή μείωση της μάζας της προκαλεί αύξηση της ιδιοσυχνότητας και μείωση της ιδιοπεριόδου του συστήματος και αντίστροφα.

3.2.2 Εξαναγκασμένη ταλάντωση χωρίς απόσβεση

Θέτοντας $c = 0$ στην εξίσωση (3.2), παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση κίνησης ενός μονοβαθμίου συστήματος που εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση χωρίς απόσβεση:

$$m \cdot \ddot{u} + k \cdot u = p(t) \quad (3.8)$$

Η απόκριση της κατασκευής για μια χρονική στιγμή t μπορεί να βρεθεί με πρόσθεση των αποκρίσεων της κατασκευής για όλες τις χρονικές στιγμές μέχρι τον εξεταζόμενο χρόνο t , δηλαδή με μεθόδους ολοκλήρωσης. Η λύση με τη μέθοδο αυτή προκύπτει τελικά με χρήση του ολοκληρώματος του Duhamel, και δίνεται από τη σχέση:

$$u(t) = \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \sin \omega_n t + u(0) \cos \omega_n t + \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau) \sin[\omega_n (t - \tau)] d\tau \quad (3.9)$$

3.2.3 Ελεύθερη ταλάντωση με απόσβεση

Θέτοντας $p(t) = 0$ στην εξίσωση (3.2), έχουμε τη διαφορική εξίσωση κίνησης ενός μονοβαθμίου συστήματος που εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση με απόσβεση:

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = 0 \quad (3.10)$$

Διαιρώντας την παραπάνω σχέση με τη μάζα m , έχουμε:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = 0 \quad (3.11)$$

, όπου $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ όπως αναφέρθηκε νωρίτερα

, και $\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{c_{cr}}$ (3.12)

Στην παραπάνω σχέση, το μέγεθος

$$c_{cr} = 2m\omega_n = 2\sqrt{km} = \frac{2k}{\omega_n} \quad (3.13)$$

καλείται *κρίσιμη απόσβεση*, ενώ το αδιάστατο μέγεθος ζ είναι ο *λόγος απόσβεσης* ο οποίος είναι φυσική ιδιότητα του συστήματος.

Αν $c \geq c_{cr}$ ή $\zeta \geq 1$, τότε το σύστημα επανέρχεται στη θέση ισορροπίας του χωρίς να εκτελέσει ταλάντωση. Αν $c < c_{cr}$ ή $\zeta < 1$, τότε το σύστημα ταλαντώνεται γύρω από τη θέση ισορροπίας του με συνεχώς μειούμενο πλάτος ταλάντωσης ώσπου να επιστρέψει σε αυτήν. Η τιμή c_{cr} της απόσβεσης είναι επομένως η ελάχιστη τιμή του c για την οποία δεν έχουμε ταλάντωση, γι' αυτό και ονομάζεται κρίσιμη απόσβεση.

Στην περίπτωση $c < c_{cr}$ ή $\zeta < 1$, τότε η ελεύθερη ταλάντωση του συστήματος περιγράφεται από τη σχέση:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[u(0) \cos \omega_D t + \left(\frac{\dot{u}(0) + \zeta\omega_n u(0)}{\omega_D} \right) \sin \omega_D t \right] \quad (3.14)$$

, όπου: $\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ (3.15)

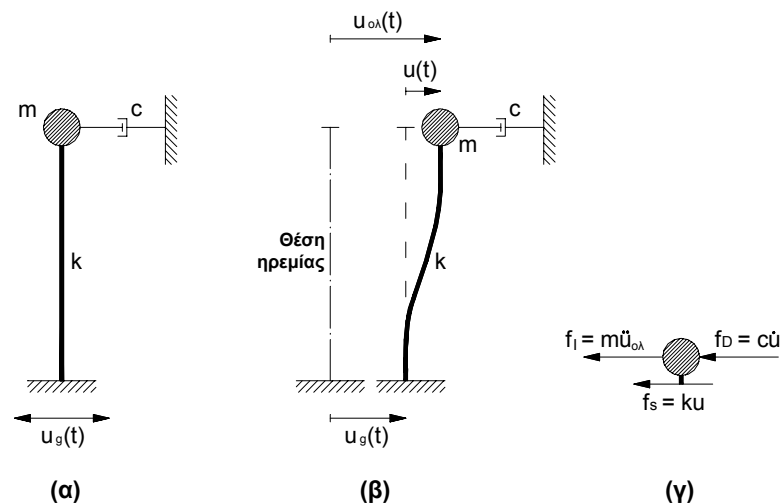
Αν στην σχέση (3.14) τεθεί $\zeta = 0$, τότε θα προκύψει η σχέση (3.4) που αναφέρεται στο σύστημα χωρίς απόσβεση. Η ιδιοπερίοδος του συστήματος με απόσβεση T_D σχετίζεται με την ιδιοπερίοδο του συστήματος χωρίς απόσβεση T_n μέσω της σχέσης:

$$T_D = \frac{T_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.16)$$

Για μικρές τιμές του λόγου απόσβεσης ζ , οι οποίες αντιστοιχούν στις συνήθεις κατασκευές (βλ. παράγραφο 3.4), παρατηρούμε ότι σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, η ιδιοπερίοδος του συστήματος με απόσβεση διαφοροποιείται ελάχιστα σε σχέση με την ιδιοπερίοδο του συστήματος χωρίς απόσβεση.

3.2.4 Κίνηση του εδάφους

Δυναμικές τάσεις και παραμορφώσεις προκαλούνται σε μία κατασκευή όχι μόνο από ένα μεταβλητό με τον χρόνο φορτίο, αλλά και από δυναμικές κινήσεις των σημείων στηρίξεώς της. Παραδείγματα μίας τέτοιας διεγέρσεως είναι οι κινήσεις των θεμελίων κτιρίου που προκαλούνται από σεισμό ή οι κινήσεις στη βάση ενός αντικειμένου που οφείλονται σε ταλαντώσεις του κτιρίου πάνω στο οποίο βρίσκεται. Ένα απλοποιημένο μοντέλο του προβλήματος της διεγέρσεως λόγω σεισμού φαίνεται στο σχήμα 3.2 που ακολουθεί, στο οποίο το έδαφος στηρίζεως, άρα και η βάση της κατασκευής, κινείται οριζόντια κατά ένα γνωστό νόμο $u_g = u_g(t)$, σχετικά με σταθερό άξονα αναφοράς.



Σχήμα 3.2. Δυναμική καταπόνηση μονοβάθμιου ταλαντωτή, οφειλόμενη στην κίνηση του εδάφους.

Αναφερόμενοι στο παραπάνω σχήμα, μπορούμε να γράψουμε:

$$u_{ολ} = u_g + u \quad (3.17)$$

, όπου $u_{ολ} = u_{ολ}(t)$ είναι η ολική οριζόντια μετατόπιση μετρούμενη από την αρχική θέση ηρεμίας της κατασκευής, ενώ $u = u(t)$ είναι η σχετική μετατόπιση της κεφαλής του στύλου ως προς τον πόδα. Είναι φανερό ότι η ελαστική δύναμη f_s και η δύναμη αποσβέσεως f_D εξαρτώνται από τη σχετική μετατόπιση u και τη σχετική ταχύτητα $\dot{u}$ αντίστοιχα, ενώ η δύναμη f_I , ως δύναμη αδράνειας, εξαρτάται από την ολική επιτάχυνση $\ddot{u}_{ολ}$ του συστήματος. Θα είναι λοιπόν:

$$f_I = m \cdot \ddot{u}_{ολ}, \quad f_D = c \cdot \dot{u}, \quad f_s = k \cdot u \quad (3.18)$$

Εξετάζοντας την ισορροπία, σύμφωνα με τη σχέση (3.2), θα έχουμε:

$$m \cdot \ddot{u}_{ολ} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = 0 \quad (3.19)$$

Η παραπάνω σχέση, με τη βοήθεια της (3.17), γίνεται:

$$m \cdot \ddot{u}_g + m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = 0 \quad (3.20)$$

ή

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = -m \cdot \ddot{u}_g \quad (3.21)$$

Στην ανωτέρω σχέση, η συνάρτηση $-m \cdot \ddot{u}_g(t)$ παίζει τον ρόλο του εξωτερικού δυναμικού φορτίου του συστήματος, γι' αυτό ονομάζεται *υποκατάστατο* ή *ενεργό φορτίο* και συμβολίζεται με:

$$p_{eff}(t) = -m \cdot \ddot{u}_g(t) \quad (3.22)$$

Παρατηρούμε, ότι η κατασκευή αποκρίνεται σε μία επιτάχυνση του εδάφους $\ddot{u}_g(t)$ ακριβώς όπως θα έκανε σε ένα εξωτερικό φορτίο $p_{eff}(t)$ ίσο προς το γινόμενο της μάζας της επί την επιτάχυνση του εδάφους. Επομένως η σεισμική καταπόνηση του φορέα μπορεί να

μελετηθεί αν είναι γνωστό το επιταχυνσιογράφημα του σεισμού. Το αρνητικό πρόσημο στην σχέση (3.22) δείχνει ότι το ισοδύναμο φορτίο p_{eff} αντιτίθεται στην κατεύθυνση της επιτάχυνσης του εδάφους. Πρακτικά αυτό δεν έχει ιδιαίτερη σημασία, εφόσον η διέγερση στη βάση αυτή καθ' αυτή ενεργεί σε αυθαίρετη (τυχαία) διεύθυνση.

3.3 Πολυβάθμιο σύστημα

Σε αντιστοιχία με το μονοβάθμιο σύστημα, η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη συμπεριφορά ενός πολυβαθμίου συστήματος με N βαθμούς ελευθερίας κίνησης το οποίο υπόκειται σε δυναμική φόρτιση, προκύπτει από την έκφραση της ισορροπίας των δυνάμεων που δρουν σε κάθε βαθμό ελευθερίας και έχει τη μορφή:

$$\{F_I\} + \{F_D\} + \{F_S\} = \{P(t)\} \quad (3.23)$$

ή απλούστερα:

$$F_I + F_D + F_S = P(t) \quad (3.24)$$

,όπου F_I είναι το $N \times 1$ διάνυσμα των αδρανειακών δυνάμεων (inertia forces), F_D είναι το $N \times 1$ διάνυσμα των δυνάμεων απόσβεσης (damping forces), F_S είναι το $N \times 1$ διάνυσμα των ελαστικών δυνάμεων (elastic forces) και $P(t)$ είναι το $N \times 1$ διάνυσμα της εξωτερικής δυναμικής φόρτισης.

3.3.1 Ελαστικές δυνάμεις – Μητρώο δυσκαμψίας

Το διάνυσμα των ελαστικών δυνάμεων F_S μίας κατασκευής δίνεται από τη μητρική σχέση:

$$F_S = k \cdot u \quad (3.25)$$

, όπου k είναι το $N \times N$ μητρώο δυσκαμψίας και u είναι το $N \times 1$ μητρώο μετατοπίσεων της κατασκευής. Το μητρώο k είναι γενικά συμμετρικό (δηλ. $k_{ij} = k_{ji}$) ενώ ο όρος του k_{ij} ισούται

με την ελαστική δύναμη που αναπτύσσεται στον βαθμό ελευθερίας i λόγω μοναδιαίας μετατόπισης κατά τον βαθμό ελευθερίας j . Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων αποτελεί σήμερα τον πιο εύχρηστο τρόπο υπολογισμού των ελαστικών ιδιοτήτων της κατασκευής, δηλαδή των όρων k_{ij} του μητρώου δυσκαμψίας K . Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, η κατασκευή διαιρείται σε ένα σύνολο διακεκριμένων στοιχείων - μελών τα οποία συνδέονται μεταξύ τους μέσω των κόμβων του συστήματος. Οι ελαστικές ιδιότητες της κατασκευής βρίσκονται με τον υπολογισμό των ελαστικών ιδιοτήτων των επιμέρους στοιχείων καταρχήν και με την κατάλληλη υπέρθεσή τους σύμφωνα με τη μεταξύ τους συνδεσμολογία στη συνέχεια.

3.3.2 Αδρανειακές δυνάμεις – Μητρώο μάζας

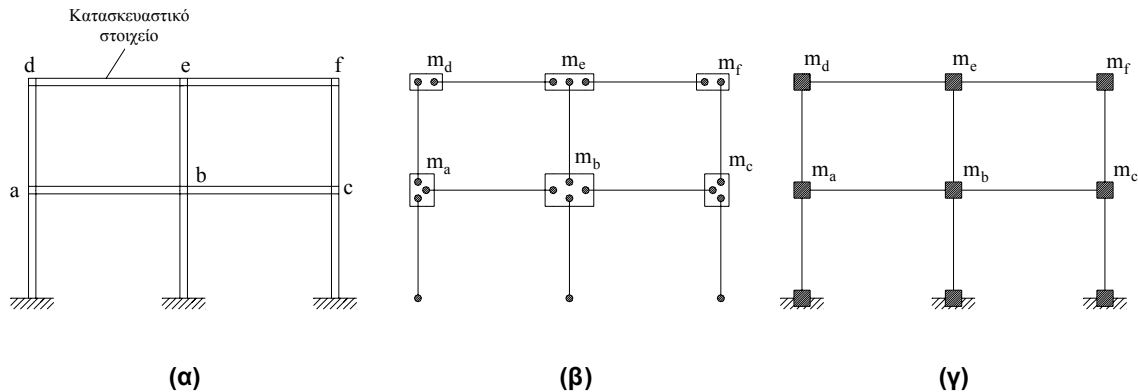
Το διάνυσμα των δυνάμεων αδράνειας F_I μίας κατασκευής δίνεται από τη μητρωική σχέση:

$$F_I = m \cdot \ddot{u} \quad (3.26)$$

, όπου m είναι το $N \times N$ μητρώο μάζας και $\ddot{u}$ είναι το $N \times 1$ μητρώο επιταχύνσεων της κατασκευής. Όπως και το μητρώο δυσκαμψίας K , έτσι και το μητρώο μάζας M μίας κατασκευής είναι γενικά συμμετρικό (δηλ. $m_{ij} = m_{ji}$), ενώ ο όρος του m_{ij} ισούται με την αναπτυσσόμενη δύναμη αδράνειας στον βαθμό ελευθερίας i λόγω μοναδιαίας επιταχύνσεως κατά τον βαθμό ελευθερίας j .

Ο απλούστερος τρόπος ορισμού των ιδιοτήτων μάζας μίας κατασκευής είναι να υποθέσουμε ότι όλη η μάζα είναι συγκεντρωμένη στα σημεία στα οποία ορίζονται οι μετατοπίσεις, δηλαδή στους κόμβους της κατασκευής. Η συνήθης διαδικασία ορισμού των σημειακών μαζών που αντιστοιχούν σε κάθε κόμβο, είναι να υποθέτουμε ότι η κατασκευή διαιρείται σε τμήματα και ότι οι κόμβοι αποτελούν τα σημεία συνδέσεως. Η μάζα κάθε τμήματος θεωρείται συγκεντρωμένη σε σημειακές μάζες στους κόμβους του, η δε κατανομή της μάζας του τμήματος καθορίζεται από τη γεωμετρία του. Η συνολική μάζα λοιπόν σε κάθε κόμβο της πλήρους κατασκευής θα είναι το άθροισμα των συμβολών στον κόμβο από όλα τα τμήματα που συντρέχουν σε αυτόν. Στο σχήμα 3.3 που ακολουθεί, φαίνεται πώς

πραγματοποιείται η κατανομή των μαζών στους κόμβους ως συγκεντρωμένες, στην περίπτωση ενός απλού επίπεδου πλαισίου.



Σχήμα 3.3. Κατανομή των μαζών των στοιχείων στους κόμβους, ως συγκεντρωμένες.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, για ένα σύστημα στο οποίο έχει γίνει η θεώρηση συγκεντρωμένων μαζών, οι εκτός διαγωνίου όροι του μητρώου μάζας μηδενίζονται, καθώς η επιτάχυνση μίας σημειακής μάζας δημιουργεί αδρανειακές δυνάμεις μόνο στον εαυτό της. Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση το μητρώο μάζας θα είναι διαγώνιο και μάλιστα επειδή η δύναμη αδράνειας στον βαθμό ελευθερίας i , λόγω μοναδιαίας επιτάχυνσης κατά τον i είναι προφανώς ίση με τη συγκεντρωμένη μάζα στο σημείο αυτό, για κάθε διαγώνιο όρο θα ισχύει $m_{ii} = m_i$, όπου m_i η συγκεντρωμένη μάζα στον αντίστοιχο κόμβο.

Αν όπως συμβαίνει πολλές φορές στην πράξη, σε έναν κόμβο έχουν οριστεί περισσότεροι από ένας βαθμοί ελευθερίας, τότε η ίδια σημειακή μάζα στον κόμβο θα σχετίζεται με κάθε αντίστοιχο βαθμό ελευθερίας. Οι συντελεστές μάζας όμως που σχετίζονται με περιστροφικούς βαθμούς ελευθερίας θα είναι μηδενικοί, γιατί έχει γίνει η υπόθεση ότι η μάζα είναι συγκεντρωμένη σε σημεία, τα οποία έχουν μηδενική ροπή αδράνειας. Επομένως, ο πίνακας συγκεντρωμένων μαζών είναι ένας διαγώνιος πίνακας, ο οποίος γενικά έχει μηδενικά στοιχεία διαγωνίου για τους περιστροφικούς βαθμούς ελευθερίας.

Εναλλακτικά, αν δεν κάνουμε τη θεώρηση των συγκεντρωμένων μαζών, μπορούμε χρησιμοποιώντας και σε αυτήν την περίπτωση την έννοια του πεπερασμένου στοιχείου, να υπολογίσουμε τους συντελεστές επιρροής μάζας κάθε στοιχείου μιας κατασκευής με μία διαδικασία ανάλογη του υπολογισμού των συντελεστών δυσκαμψίας των στοιχείων. Στη συνέχεια, ο πίνακας μάζας μπορεί να βρεθεί με μία διαδικασία υπερθέσεως ακριβώς

αντίστοιχη με αυτήν που χρησιμοποιείται προκειμένου να μορφωθεί το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής. Ο προκύπτων από αυτήν τη μεθοδολογία πίνακας καλείται *συμβιβαστός πίνακας μάζας* και έχει την ίδια μορφή, δηλαδή κατανομή μη μηδενικών όρων με τον πίνακα δυσκαμψίας.

Η δυναμική ανάλυση ενός συστήματος συμβιβαστών μαζών γενικά απαιτεί περισσότερο υπολογιστικό κόπο από ότι η ανάλυση ενός συστήματος συγκεντρωμένων μαζών. Αυτό οφείλεται αφενός στο γεγονός ότι το συμβιβαστό μητρώο μάζας έχει εν γένει πολλούς μη διαγώνιους όρους και αφετέρου στο ότι σε μία ανάλυση συμβιβαστών μαζών απαιτείται να περιληφθούν όλοι οι βαθμοί ελευθερίας κάθε κόμβου, μεταφορικοί και περιστροφικοί, σε αντίθεση με την περίπτωση των συγκεντρωμένων μαζών.

3.3.3 Δυνάμεις απόσβεσης – Μητρώο απόσβεσης

Όπως είδαμε στην παράγραφο 3.2, οι μηχανισμοί απώλειας ενέργειας σε μία κατασκευή υποβαλλόμενη σε δυναμικές φορτίσεις, μπορούν να προσεγγιστούν με τη θεώρηση της ισοδύναμης ιξώδους απόσβεσης. Με την υπόθεση αυτή, μπορούμε να σχετίσουμε τις αναπτυσσόμενες δυνάμεις αποσβέσεως F_D με τις ταχύτητες $\dot{u}$ της κατασκευής, σύμφωνα με τη μητρική σχέση:

$$F_D = c \cdot \dot{u} \quad (3.27)$$

, όπου c είναι το $N \times N$ μητρώο απόσβεσης και $\dot{u}$ είναι το $N \times 1$ μητρώο ταχυτήτων της κατασκευής. Ο όρος c_{ij} του μητρώου απόσβεσης c ισούται γενικά με την αναπτυσσόμενη δύναμη απόσβεσης στον βαθμό ελευθερίας i λόγω μοναδιαίας ταχύτητας κατά τον βαθμό ελευθερίας j . Το μητρώο απόσβεσης, σε αντίθεση με τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας, ενδέχεται σε κάποιες περιπτώσεις να είναι μη συμμετρικό, ενώ η μόρφωσή του με ακρίβεια είναι γενικά δύσκολη υπόθεση. Με το θέμα αυτό θα ασχοληθούμε εκτενέστερα στην παράγραφο 3.4.

3.3.4 Μητρική διαφορική εξίσωση κίνησης

Σύμφωνα με όσα αναπτύχθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους, με αντικατάσταση των σχέσεων (3.25), (3.26) και (3.27) στη σχέση (3.24), προκύπτει η μητρική διαφορική εξίσωση που διέπει την κίνηση ενός πολυβαθμίου συστήματος με N βαθμούς ελευθερίας κίνησης υποβαλλόμενου σε δυναμική φόρτιση, η οποία έχει τη μορφή:

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = P(t) \quad (3.28)$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί ένα σύστημα N συνήθων διαφορικών εξισώσεων και είναι η ισοδύναμη της σχέσης (3.2) του μονοβαθμίου συστήματος, για ένα πολυβάθμιο σύστημα με N βαθμούς ελευθερίας. Τα βαθμωτά μεγέθη της σχέσης (3.2) έχουν γίνει στη σχέση (3.28) διανύσματα ή μητρώα τάξης N .

Οι μη διαγώνιοι όροι των μητρώων m , c και k καλούνται *συζευγμένοι όροι*. Στη γενική περίπτωση, ενδέχεται να υπάρχουν συζευγμένοι όροι τόσο στο μητρώο δυσκαμψίας k , όσο και στα μητρώα απόσβεσης c και μάζας m . Πάντως, σε κάθε περίπτωση η σύζευξη στα μητρώα αυτά εξαρτάται από την επιλογή των βαθμών ελευθερίας που εκφράζουν τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος.

3.3.5 Ελεύθερη ταλάντωση χωρίς απόσβεση - Ιδιομορφές

Αν στη σχέση (3.28) τεθεί $P(t) = \{0\}$, τότε λαμβάνουμε τη διαφορική εξίσωση κίνησης ενός πολυβαθμίου συστήματος με N βαθμούς ελευθερίας κίνησης το οποίο εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση, η οποία για συστήματα χωρίς απόσβεση ($c=0$), γίνεται:

$$m \cdot \ddot{u} + k \cdot u = 0 \quad (3.29)$$

Η εξίσωση (3.29) παριστά N ομογενείς διαφορικές εξισώσεις οι οποίες είναι συζευγμένες μεταξύ τους μέσω των μητρώων μάζας, δυσκαμψίας ή και των δύο. Το πρόβλημα συνίσταται στον καθορισμό των συνθηκών υπό τις οποίες η εξίσωση (3.29) επιτρέπει την ύπαρξη κινήσεως. Θεωρώντας αναλογία προς τη συμπεριφορά ενός μονοβαθμίου συστήματος, υποθέτουμε ότι η κίνηση σε ελεύθερες ταλαντώσεις είναι απλή αρμονική, η οποία για πολυβάθμια συστήματα εκφράζεται ως εξής:

$$u(t) = q_n(t) \cdot \phi_n \quad (3.30)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, ο όρος ϕ_n παριστά το σχήμα της ταλάντωσης, το οποίο δεν μεταβάλλεται με το χρόνο, ενώ η έκφραση $q_n(t)$ παριστά τη χρονική εξάρτηση της κίνησης, η οποία είναι απλή αρμονική:

$$q_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \quad (3.31)$$

, όπου A_n και B_n είναι σταθερές οι οποίες μπορούν εν γένει να προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.30) και (3.31), παίρνουμε την εξίσωση:

$$u(t) = \phi_n (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \quad (3.32)$$

, στην οποία τα μεγέθη ϕ_n και ω_n είναι άγνωστα. Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.32) στην εξίσωση ισορροπίας (3.29), παίρνουμε:

$$[-\omega_n^2 m \phi_n + k \phi_n] \cdot q_n(t) = 0 \quad (3.33)$$

Η παραπάνω εξίσωση ικανοποιείται με δύο τρόπους. Είτε $q_n(t) = 0$, το οποίο σημαίνει ότι $u(t) = 0$, άρα δεν έχουμε κίνηση (αυτή η λύση καλείται *τετριμμένη λύση*), είτε οι φυσικές ιδιοσυχνότητες ω_n και τα ιδιοσχήματα ϕ_n του συστήματος πρέπει να ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$k \phi_n = \omega_n^2 m \phi_n \quad (3.34)$$

Το παραπάνω αλγεβρικό πρόβλημα καλείται πρόβλημα ιδιοτιμών πινάκων και μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$[k - \omega_n^2 m] \cdot \phi_n = 0 \quad (3.35)$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει τετριμμένη λύση την $\phi_n = 0$ για την οποία δεν έχουμε κίνηση, ενώ για να υπάρχει και μη τετριμμένη λύση, πρέπει να ισχύει η συνθήκη:

$$\det[k - \omega_n^2 m] = 0 \quad (3.36)$$

Με την ανάπτυξη της παραπάνω ορίζουσας, προκύπτει μία πολυωνυμική εξίσωση βαθμού N ως προς την παράμετρο συχνότητας ω^2 . Για πραγματικά συστήματα κατασκευών τα οποία έχουν συμμετρικά και θετικά ορισμένα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας αποδεικνύεται ότι όλες οι N ρίζες της πολυωνυμικής αυτής εξίσωσης είναι πραγματικές και θετικές. Οι ρίζες αυτές καθορίζουν τις ιδιοσυχνότητες ω_n των N μορφών ταλαντώσεων που είναι δυνατές για το σύστημα. Η μορφή που αντιστοιχεί στην χαμηλότερη συχνότητα καλείται πρώτη μορφή, η επόμενη δεύτερη, κ.ο.κ.

Για κάθε μία από τις ιδιοσυχνότητες ω_n , λύνοντας τη σχέση (3.35) ως προς ϕ_n παίρνουμε το σχήμα της κάθε ιδιομορφής. Τα διανύσματα ϕ_n καλούνται *ιδιοδιανύσματα* ή *ιδιοσχήματα*. Αν και με αυτήν την διαδικασία μπορεί να βρεθεί το σχήμα της κάθε ταλάντωσης, παρ' όλα αυτά δεν μπορεί να υπολογιστεί και το απόλυτο εύρος της ταλάντωσης.

Τα N ιδιοδιανύσματα και οι N ιδιοσυχνότητες μπορούν να γραφτούν σε συμπαγή μορφή ως εξής:

$$\Phi = [\phi_{jn}] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \cdots & \phi_{NN} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_N^2 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις, η εξίσωση (3.34) μπορεί να γραφτεί σε συμπαγή επίσης μορφή, περιλαμβάνοντας όλες τις N ιδιομορφές, ως εξής:

$$k\Phi = m\Phi\Omega^2 \quad (3.38)$$

Θεωρώντας ότι το πρόβλημα ιδιοτιμών των σχέσεων (3.36) και (3.35) έχει επιλυθεί, η γενική λύση της εξίσωσης (3.29) θα προκύψει με την υπέρθεση των αποκρίσεων λόγω της κάθε μορφής ταλαντώσεως της κατασκευής, σύμφωνα με τη σχέση:

$$u(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \quad (3.39)$$

, η οποία αν ληφθούν υπόψη οι αρχικές συνθήκες $u(0)$ και $\dot{u}(0)$ του προβλήματος, μας δίνει:

$$u(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n (q_n(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t) = \sum_{n=1}^N \phi_n q_n(t) = \Phi q \quad (3.40)$$

, όπου:

$$q_n(0) = \frac{\phi_n^T m u(0)}{M_n} \quad \text{και} \quad \dot{q}_n(0) = \frac{\phi_n^T m \dot{u}(0)}{M_n} \quad (3.41)$$

$$q_n(t) = q_n(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (3.42)$$

, και q είναι το συμπαγές μητρώο το οποίο περιλαμβάνει όλους τους όρους $q_n(t)$. Συγκρίνοντας τις παραπάνω σχέσεις με τις αντίστοιχες σχέσεις που αφορούν τη συμπεριφορά του μονοβαθμίου συστήματος, γίνεται σαφής ο συσχετισμός των δύο. Με τη μεθοδολογία που ακολουθήθηκε, οι συζευγμένες διαφορικές εξισώσεις κίνησης, μέσω κατάλληλων μετασχηματισμών μετατράπηκαν σε μη συζευγμένες, οπότε το σύστημα των N βαθμών ελευθερίας κίνησης αντιμετωπίζεται πλέον σαν να απαρτιζόταν από N μονοβάθμια συστήματα των οποίων η δυναμική συμπεριφορά είναι γνωστή και μπορεί εύκολα να υπολογιστεί.

3.3.6 Ορθογωνικότητα των ιδιομορφών

Τα σχήματα μορφών ελευθέρων ταλαντώσεων μπορεί να αποδειχτεί ότι ικανοποιούν τις συνθήκες ορθογωνικότητας, δηλαδή:

$$\text{για } \omega_n \neq \omega_r \Rightarrow \begin{cases} \phi_n^T k \phi_r = 0 \\ \phi_n^T m \phi_r = 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

Λόγω της ορθογωνικότητας των ιδιομορφών, τα μητρώα:

$$K = \Phi^T k \Phi \quad \text{και} \quad M = \Phi^T m \Phi$$

, είναι διαγώνια με διαγώνιους όρους:

$$K_n = \phi_n^T k \phi_n \quad \text{και} \quad M_n = \phi_n^T m \phi_n \quad (3.44)$$

Τα παραπάνω μεγέθη K_n και M_n καλούνται γενικευμένες δυσκαμψίες και γενικευμένες μάζες του συστήματος αντίστοιχα και συνδέονται μεταξύ τους, σε αντιστοιχία και πάλι με το μονοβάθμιο σύστημα, μέσω της σχέσης:

$$K_n = \omega_n^2 M_n \quad (3.45)$$

3.3.7 Κανονικοποίηση των ιδιομορφών

Οι μορφές παραμορφώσεως σε ταλάντωση που προκύπτουν από τη λύση του προβλήματος ιδιοτιμών είναι αυθαίρετες. Οποιοδήποτε εύρος μπορεί ικανοποιεί τη βασική εξίσωση συχνότητας και μόνο τα σχήματα ορίζονται ακριβώς. Αυτό σημαίνει ότι αν το διάνυσμα ϕ_n είναι μία ιδιομορφή, οποιοδήποτε πολλαπλάσιό του θα αποτελεί επίσης την ίδια ιδιομορφή, καθώς θα ικανοποιεί τη συνθήκη (3.35). Γι' αυτόν τον λόγο, γίνεται μία κανονικοποίηση των τιμών των διανυσμάτων αυτών, συχνά με διαίρεση με τη μέγιστη απομάκρυνση του κάθε ιδιοδιανύσματος, με αποτέλεσμα όλες οι προκύπτουσες απομακρύνσεις για κάθε ιδιομορφή να είναι μικρότερες ή ίσες με τη μονάδα.

Σε προγράμματα H/Y, η κανονικοποίηση γίνεται τις περισσότερες φορές έτσι ώστε τα μεγέθη M_n να έχουν μοναδιαίες τιμές. Σε αυτήν την περίπτωση:

$$M_n = \phi_n^T m \phi_n = 1 \quad \text{και} \quad \Phi^T m \Phi = I \quad (3.46)$$

, όπου I το μοναδιαίο μητρώο διαστάσεων $N \times N$.

3.3.8 Ελεύθερη ταλάντωση με απόσβεση

Θέτοντας $p(t) = 0$ στη σχέση (3.28), παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση κίνησης για την ελεύθερη ταλάντωση ενός πολυβαθμίου συστήματος με απόσβεση:

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = 0 \quad (3.47)$$

Αν εκφράσουμε τη μετατόπιση u σε όρους των φυσικών μορφών του συστήματος χωρίς απόσβεση, σύμφωνα με τη γνωστή σχέση:

$$u(t) = \Phi q \quad (3.48)$$

, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} m\Phi\ddot{q} + c\Phi\dot{q} + k\Phi q &= 0 \Rightarrow \\ \Phi^T m\Phi\ddot{q} + \Phi^T c\Phi\dot{q} + \Phi^T k\Phi q &= 0 \Rightarrow \\ M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq &= 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

, όπου τα μητρώα M και K είναι διαγώνια, και

$$C = \Phi^T c \Phi, \quad \text{δηλαδή } C_{nr} = \phi_n^T c \phi_r \quad (3.50)$$

Το τετραγωνικό μητρώο C ενδέχεται να είναι ή και να μην είναι διαγώνιο, ανάλογα με την διανομή της απόσβεσης στο σύστημα. Αν το μητρώο C είναι διαγώνιο, τότε η παραπάνω εξίσωση παριστά N το πλήθος μη συζευγμένες μεταξύ τους διαφορικές εξισώσεις, και το σύστημα λέμε ότι έχει *τυπική απόσβεση*. Τέτοια συστήματα έχουν τις ίδιες φυσικές μορφές όπως και τα συστήματα χωρίς απόσβεση. Επομένως, το πρόβλημα των ιδιοτιμών μπορεί να λυθεί σε αυτές τις περιπτώσεις για το σύστημα χωρίς απόσβεση. Συστήματα με απόσβεση τέτοια ώστε το μητρώο C να μην είναι διαγώνιο λέμε ότι έχουν *μη τυπική απόσβεση* και για αυτά οι ιδιομορφές δεν είναι ίδιες με αυτές των συστημάτων χωρίς απόσβεση.

Επομένως, σε ένα σύστημα με τυπική απόσβεση, η εξίσωση (3.48), γίνεται:

$$M_n \ddot{q}_n + C_n \dot{q}_n + K_n q_n = 0 \quad (3.51)$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί ένα σύστημα N συνήθων διαφορικών εξισώσεων μη συζευγμένων μεταξύ τους και είναι αντίστοιχη με τη σχέση (3.10) που αναφέρεται στο μονοβάθμιο σύστημα. Ο λόγος απόσβεσης μπορεί επομένως να εκφραστεί σε αντιστοιχία με το μονοβάθμιο σύστημα ως εξής:

$$\zeta_n = \frac{C_n}{2M_n\omega_n} \quad (3.52)$$

, ενώ λόγω της μη σύζευξης που επιτεύχθηκε, η εξίσωση (3.49) μπορεί να επιλυθεί με τις μεθόδους που αναφέρονται στο μονοβάθμιο σύστημα:

Διαιρώντας την εξίσωση (3.49) με τη γενικευμένη μάζα M_n , παίρνουμε:

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2q_n = 0 \quad (3.53)$$

Η παραπάνω εξίσωση, όπως είδαμε, έχει λύση:

$$q_n(t) = e^{-\zeta_n\omega_n t} \left[q_n(0) \cos \omega_{nD} t + \frac{\dot{q}_n(0) + \zeta_n\omega_n q_n(0)}{\omega_{nD}} \sin \omega_{nD} t \right] \quad (3.54)$$

, ενώ η n -οστή ιδιοσυχνότητα του συστήματος με απόσβεση, δίνεται από τη σχέση:

$$\omega_{nD} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2} \quad (3.55)$$

Η λύση του αρχικού προβλήματος (3.46) προκύπτει τελικά με αντικατάσταση της σχέσης (3.53) στην εξίσωση (3.47) και υπέρθεση των αποκρίσεων λόγω όλων των N ιδιομορφών, οπότε:

$$u(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n e^{-\zeta_n\omega_n t} \left[q_n(0) \cos \omega_{nD} t + \frac{\dot{q}_n(0) + \zeta_n\omega_n q_n(0)}{\omega_{nD}} \sin \omega_{nD} t \right] \quad (3.56)$$

Όπως διαπιστώνεται από τη σχέση (3.54), για τιμές του λόγου απόσβεσης $\zeta < 20\%$, οι οποίες αντιστοιχούν σε πραγματικές κατασκευές (βλ. πιν. 3.1), οι τιμές των ιδιοσυχνοτήτων

ω_{nD} του συστήματος με απόσβεση, ελάχιστα διαφοροποιούνται από εκείνες του συστήματος χωρίς απόσβεση (ω_n).

3.3.9 Εξαναγκασμένη ταλάντωση χωρίς απόσβεση

Αν στην εξίσωση ισορροπίας (3.28), τεθεί $c = 0$, τότε παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας για το σύστημα χωρίς απόσβεση, η οποία είναι:

$$m \cdot \ddot{u} + k \cdot u = p(t) \quad (3.57)$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης, αν θεωρήσουμε την ανάλυση της ταλάντωσης σε μορφές, θα είναι της μορφής:

$$u(t) = \sum_{r=1}^N \phi_r q_r(t) = \Phi q(t) \quad (3.58)$$

, από την οποία με εκμετάλλευση της ορθογωνικότητας των ιδιομορφών, καταλήγουμε στη σχέση:

$$M_n \ddot{q}_n + K_n q_n = P_n(t) \quad (3.59)$$

$$\text{, όπου: } M_n = \phi_n^T m \phi, \quad K_n = \phi_n^T k \phi_n \quad \text{και} \quad P_n(t) = \phi_n^T p(t) \quad (3.60)$$

Το μέγεθος M_n και K_n είναι οι γενικευμένες μάζες και δυσκαμψίες του συστήματος, ενώ το μέγεθος P_n καλείται αντίστοιχα γενικευμένη δύναμη. Διαιρώντας τη σχέση (3.59) δια τη γενικευμένη μάζα M_n , παίρνουμε:

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{P_{n(t)}}{M_n} \quad (3.61)$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί τη διαφορική εξίσωση κίνησης για την κάθε ιδιομορφή n . Και σε αυτήν την περίπτωση καταλήξαμε, μέσω κατάλληλων μετασχηματισμών, σε n μη συζευγμένες διαφορικές εξισώσεις, επομένως το σύστημα αντιμετωπίζεται πλέον ως ένα σύνολο N μονοβαθμίων συστημάτων. Σε συμπαγή μορφή, για όλες τις ιδιομορφές μαζί, έχουμε:

$$M\ddot{q} + Kq = P(t) \quad (3.62)$$

, όπου M είναι το διαγώνιο μητρώο των γενικευμένων μαζών, K είναι το διαγώνιο μητρώο των γενικευμένων δυσκαμψιών και $P(t)$ είναι το μητρώο στήλη των γενικευμένων δυνάμεων.

3.3.10 Εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση

Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την εξαναγκασμένη ταλάντωση ενός πολυβαθμίου συστήματος με απόσβεση έχει τη γενική μορφή:

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = P(t) \quad (3.63)$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης, αν θεωρήσουμε και σε αυτήν την περίπτωση την ανάλυση της ταλάντωσης σε ιδιομορφές, θα είναι της μορφής:

$$u(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n q_n(t) = \Phi q(t) \quad (3.64)$$

, όπου ϕ_n είναι οι n -οστή ιδιομορφή του συστήματος χωρίς απόσβεση. Με αντικατάσταση της παραπάνω σχέσης στην εξίσωση ισορροπίας (3.63), παίρνουμε:

$$M_n \ddot{q}_n + \sum_{r=1}^N C_{nr} \dot{q}_r + K_n q_n = P_n(t) \quad (3.65)$$

$$, \text{ όπου } C_{nr} = \phi_n^T c \phi_r \quad (3.66)$$

$$, \text{ άρα: } M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = P(t) \quad (3.67)$$

Το μητρώο C είναι γενικά, όπως είδαμε και στην περίπτωση της ελεύθερης ταλάντωσης με απόσβεση, ένα μη διαγώνιο μητρώο που περιέχει τους όρους C_{nr} . Οι N διαφορικές εξισώσεις της σχέσης (3.67) είναι γενικά συζευγμένες μέσω του μητρώου απόσβεσης C . Για συστήματα με τυπική απόσβεση, το μητρώο C είναι διαγώνιο, δηλαδή $C_{nr}=0$ για $n \neq r$, με διαγώνιους όρους C_n . Σε αυτήν την περίπτωση, οι εξισώσεις γίνονται μη συζευγμένες, επομένως μπορούν να γραφτούν στη μορφή:

$$M_n \ddot{q}_n + C_n \dot{q}_n + K_n q_n = P_n(t) \Rightarrow$$

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{P_n(t)}{M_n} \quad (3.68)$$

, όπου ζ_n είναι ο λόγος απόσβεσης για την n -οστή ιδιομορφή. Η απόκριση για την κάθε ιδιομορφή θα δίνεται από τη σχέση:

$$u_n(t) = \phi_n q_n(t) \quad (3.69)$$

, ενώ η συνολική απόκριση θα προκύψει με υπέρθεση των N ιδιομορφών, σύμφωνα με τη σχέση:

$$u(t) = \sum_{n=1}^N u_n(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n q_n(t) \quad (3.70)$$

3.4 Απόσβεση

Ο υπολογισμός του μητρώου απόσβεσης c μίας κατασκευής είναι γενικά πολύπλοκη υπόθεση. Θα μπορούσε να υποστηρίξει κανείς ότι είναι δυνατό να μορφωθεί, όπως και το μητρώο δυσκαμψίας, μέσω της γεωμετρίας και των ιδιοτήτων απόσβεσης του κάθε μεμονωμένου μέλους της κατασκευής. Παρόλο που κάτι τέτοιο είναι δυνατό, είναι πρακτικά μη εφαρμόσιμο, καθώς σε αντίθεση με το μέτρο ελαστικότητας, οι ιδιότητες απόσβεσης των υλικών δεν μας είναι απολύτως σαφείς. Ακόμη όμως και αν αυτές οι ιδιότητες μας ήταν απολύτως γνωστές, το προκύπτων από αυτή την διαδικασία μητρώο απόσβεσης, δεν θα

ανταποκρινόταν ιδιαίτερα στην πραγματική απώλεια ενέργειας του συστήματος, καθώς κάποιοι σημαντικοί παράγοντες απώλειας ενέργειας όπως λόγου χάρη η τριβή σε συνδέσεις μεταλλικών κατασκευών, το άνοιγμα και το κλείσιμο μικρορωγμών σε κατασκευές από σκυρόδεμα ή οι τριβές σε μέλη της κατασκευής που δεν έχουν ληφθεί υπόψη στο μοντέλο της ανάλυσης (π.χ. τοιχοποιία) δεν θα έχουν συμπεριληφθεί στους υπολογισμούς.

Είναι προτιμότερο επομένως, το μητρώο απόσβεσης να υπολογίζεται μέσω των λόγων απόσβεσης οι οποίοι εκτιμώνται πειραματικά με βάση δεδομένα που έχουν προέλθει από πραγματικές διεγέρσεις σε υπάρχουσες κατασκευές, αντίστοιχες με την εξεταζόμενη. Στην περίπτωση αυτή, λαμβάνεται υπόψη έστω και προσεγγιστικά η συμμετοχή όλων των μηχανισμών απώλειας ενέργειας του συστήματος. Αν και οι μελετητές έχουν σήμερα στη διάθεσή τους αρκετά πολύτιμα δεδομένα και καταγραφές πάνω στο αντικείμενο, η χρήση τους πρέπει να γίνεται με σύνεση και κριτικό πνεύμα, καθώς κάποια από αυτά είναι μη χρησιμοποιήσιμα για τη δυναμική ανάλυση και τον σχεδιασμό. Για παράδειγμα, οι λόγοι απόσβεσης που προκύπτουν πειραματικά μέσω τεχνητών διεγέρσεων μικρού εύρους της κατασκευής δεν είναι γενικά αντιπροσωπευτικές της μεγαλύτερης απόσβεσης που θα εκδηλωθεί στον σεισμό ο οποίος προκαλεί εν γένει μεγάλες μετατοπίσεις και εντάσεις, πολλές φορές κοντά ή και πέραν του ορίου διαρροής των μελών.

Επομένως, στις πλείστες περιπτώσεις, οι χρησιμοποιούμενοι λόγοι απόσβεσης πρέπει να βασίζονται σε καταγραφές από πραγματικές σεισμικές δονήσεις. Από την άλλη όμως, καταγεγραμμένα δεδομένα από ισχυρές σεισμικές διεγέρσεις στις οποίες μέλη της κατασκευής έχουν πάθει σημαντικές διαρροές, θα μας έδιναν συντελεστές απόσβεσης που θα περιελάμβαναν και τις απώλειες ενέργειας λόγω των διαρροών αυτών. Αυτοί οι συντελεστές δεν θα ήταν χρήσιμοι σε δυναμικές αναλύσεις, καθώς σε αυτές η απώλεια ενέργειας λόγω διαρροής λαμβάνεται γενικά υπόψη μέσω μη γραμμικών σχέσεων δύναμης – μετατόπισης. Άρα, τα πιο χρήσιμα σε κάθε περίπτωση δεδομένα όσον αφορά την απόσβεση, είναι αυτά που έχουν προέλθει από ισχυρές σεισμικές δονήσεις στις οποίες όμως η κατασκευή παρέμεινε στην ελαστική περιοχή. Τέτοια στοιχεία είναι γενικά δύσκολο να βρεθούν, καθώς αφενός λίγες κατασκευές έχουν εγκατεστημένους μόνιμους επιταχυνσιογράφους έτοιμους να καταγράψουν την απόκριση όταν συμβεί ο σεισμός και αφετέρου οι ισχυροί σεισμοί σπανίζουν. Αν δεν υπάρχουν αντίστοιχες καταγραφές, τότε προτείνονται οι τιμές του πίνακα 3.1 που ακολουθεί. Οι μικρότερες τιμές σε κάθε υποπερίπτωση μπορούν να χρησιμοποιηθούν για συνήθεις συμβατικές κατασκευές, ενώ οι

μεγαλύτερες τιμές για μεγαλύτερες και πιο σημαντικές κατασκευές οι οποίες πρέπει να σχεδιαστούν πιο συντηρητικά.

Πίνακας 3.1. Προτεινόμενες τιμές του συντελεστή απόσβεσης

Επίπεδο τάσης	Είδος και κατάσταση της κατασκευής	Συντελεστής απόσβεσης (%)
Τάση λειτουργίας, όχι μεγαλύτερη από το $\frac{1}{2}$ της τάσης διαρροής	▪ Συγκολλητός χάλυβας ▪ Προεντεταμένο σκυρόδεμα ▪ Οπλισμένο σκυρόδεμα (με μικρή ρηγμάτωση)	2-3
	▪ Οπλισμένο σκυρόδεμα με αρκετή ρηγμάτωση	3-5
	▪ Χάλυβας με κοχλιώσεις ή υλώσεις ▪ Ξύλινες κατασκευές με κοχλιωτές ή καρφωτές συνδέσεις	5-7
Στο όριο διαρροής ή μόλις λίγο πάνω από αυτό	▪ Συγκολλητός χάλυβας ▪ Προεντεταμένο σκυρόδεμα (χωρίς ολική απώλεια της προέντασης)	5-7
	▪ Προεντεταμένο σκυρόδεμα, με ολική απώλεια της προέντασης	7-10
	▪ Οπλισμένο σκυρόδεμα	7-10
	▪ Χάλυβας με κοχλιώσεις ή υλώσεις ▪ Ξύλινες κατασκευές με κοχλιωτές συνδέσεις	10-15
	▪ Ξύλινες κατασκευές με καρφωτές συνδέσεις	15-20

Πηγή: N. M. Newmark, and W. J. Hall, Earthquake Spectra and Design, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, California, 1982.

Οι προτεινόμενες τιμές απόσβεσης του παραπάνω πίνακα μπορούν να χρησιμοποιηθούν απευθείας για γραμμικές αναλύσεις κατασκευών με τυπική απόσβεση.

Τυπική απόσβεση (Classical damping)

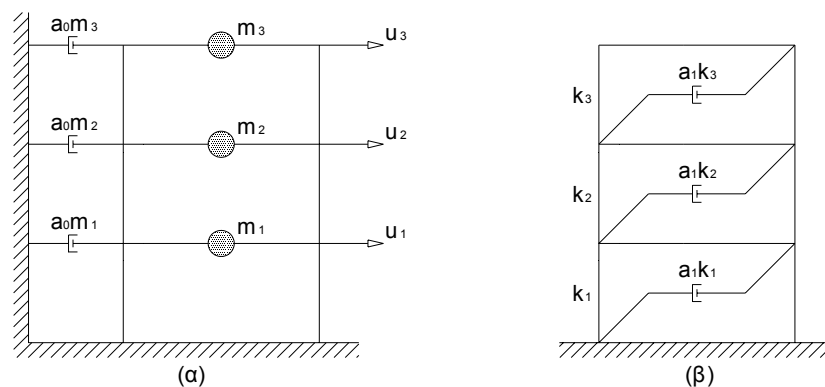
Η τυπική απόσβεση είναι μία κατάλληλη εξιδανίκευση όταν στο εξεταζόμενο σύστημα οι ιδιότητες απόσβεσης είναι ομοιόμορφα κατανομημένες σε όλη την κατασκευή, όπως λόγου χάρη στην περίπτωση ενός πολυώροφου πλαισίου με ενιαία κατασκευαστική διάταξη και το ίδιο υλικό καθ' όλο το ύψος του. Όπως είδαμε στις παραγράφους 3.3.8 και 3.3.10, όταν το σύστημα έχει τυπική απόσβεση, το μητρώο C είναι διαγώνιο και οι

διαφορικές εξισώσεις κίνησης μπορούν να μετασχηματιστούν σε ισοδύναμες μη συζευγμένες εξισώσεις, οπότε το πολυβάθμιο σύστημα μπορεί να αντιμετωπιστεί ως ένα σύνολο μονοβαθμίων συστημάτων με τη μέθοδο της υπέρθεσης των ιδιομορφών.

Ας θεωρήσουμε ότι το μητρώο απόσβεσης είναι ανάλογο του μητρώου μάζας ή του μητρώου δυσκαμψίας της κατασκευής, δηλαδή:

$$c = a_0 m \quad \text{ή} \quad c = a_1 k \quad (3.71)$$

, όπου οι όροι a_0 και a_1 έχουν διαστάσεις sec^{-1} και sec αντίστοιχα. Αποδεικνύεται εύκολα μέσω των σχέσεων ορθογωνικότητας (3.43) ότι και για τις δύο παραπάνω θεωρήσεις όσον αφορά το μητρώο απόσβεσης c , το προκύπτον μητρώο C είναι διαγώνιο, επομένως τα δύο παραπάνω μητρώα αποτελούν τυπικά μητρώα απόσβεσης. Οι δύο παραπάνω θεωρήσεις, αντιπροσωπεύουν τα δύο μοντέλα απόσβεσης του σχήματος 3.4 για την περίπτωση ενός επίπεδου πολυώροφου πλαισίου.



Σχήμα 3.4. (α) Απόσβεση ανάλογη της μάζας. (β) Απόσβεση ανάλογη της δυσκαμψίας

(α) Για την περίπτωση της απόσβεσης της ανάλογης με τη μάζα, η γενικευμένη απόσβεση θα δίνεται από τη σχέση:

$$C_n = a_0 M_n \quad (3.72)$$

, ενώ ο αντίστοιχος λόγος απόσβεσης για την n ιδιομορφή, θα είναι:

$$\zeta_n = \frac{C_n}{2M_n\omega_n} = \frac{a_0}{2} \frac{1}{\omega_n} \quad (3.73)$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις, ο συντελεστής απόσβεσης είναι αντιστρόφως ανάλογος της ιδιοσυχνότητας ω_n . Μπορούμε αρχικά να επιλέξουμε κατάλληλα την παράμετρο a_0 , ούτως ώστε σύμφωνα με τη σχέση (3.73), να έχουμε σε κάποια ιδιομορφή, έστω i , τον επιθυμητό λόγο απόσβεσης ζ_i . Επομένως,

$$a_0 = 2\zeta_i\omega_i \quad (3.74)$$

Για κάθε μία από τις υπόλοιπες $N-1$ ιδιομορφές, ο λόγος απόσβεσης θα προκύψει σύμφωνα με τη σχέση (3.73).

(β) Για την περίπτωση της απόσβεσης της ανάλογης με τη δυσκαμψία, η γενικευμένη απόσβεση θα δίνεται από τη σχέση:

$$C_n = a_1\omega_n^2 M_n \quad (3.75)$$

, ενώ ο αντίστοιχος λόγος απόσβεσης για την n ιδιομορφή, θα είναι:

$$\zeta_n = \frac{C_n}{2M_n\omega_n} = \frac{a_1}{2} \omega_n \quad (3.76)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, ο λόγος απόσβεσης είναι ανάλογος της ιδιοσυχνότητας ω_n . Μπορούμε αντίστοιχα με την περίπτωση (α) να επιλέξουμε κατάλληλα την παράμετρο a_1 , έτσι ώστε σύμφωνα με τη σχέση (3.76), να έχουμε σε κάποια ιδιομορφή j , τον επιθυμητό λόγο απόσβεσης ζ_j . Επομένως,

$$a_1 = \frac{2\zeta_j}{\omega_j} \quad (3.77)$$

Για κάθε μία από τις υπόλοιπες $N-1$ ιδιομορφές, ο λόγος απόσβεσης θα προκύψει σύμφωνα με τη σχέση (3.76).

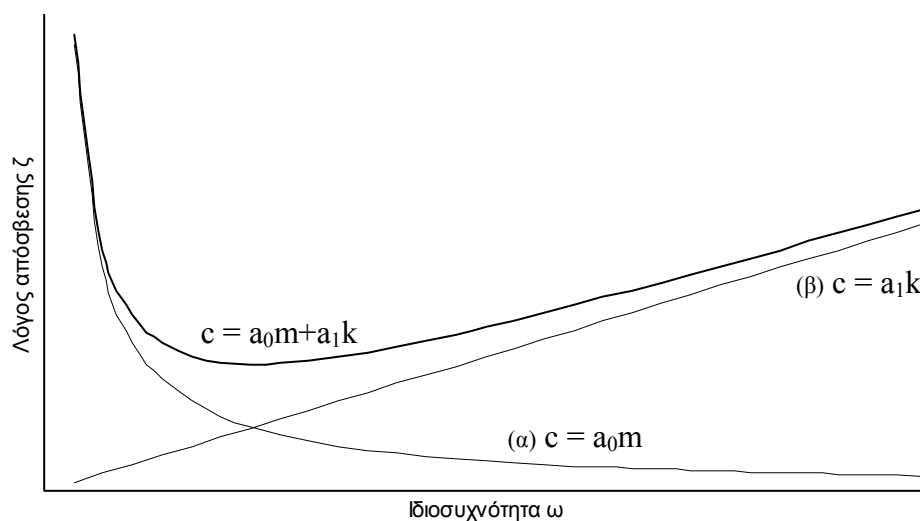
Τα μητρώα απόσβεσης που περιγράφονται από τις σχέσεις (3.71) δεν είναι απολύτως κατάλληλα για την ανάλυση πολυβαθμίων συστημάτων στην πράξη. Και αυτό γιατί οι συσχετίσεις που παρέχουν μεταξύ των λόγων απόσβεσης ζ_n και των ιδιοσυχνοτήτων ω_n δεν ανταποκρίνονται κατά πολύ στις πειραματικές καταγραφές, σύμφωνα με τις οποίες μπορεί περισσότερες ιδιομορφές να εμφανίζουν περίπου τους ίδιους λόγους απόσβεσης ζ . Μία θεώρηση που προσεγγίζει καλύτερα την πραγματικότητα είναι αυτή της απόσβεσης Rayleigh, σύμφωνα με την οποία:

$$c = a_0 m + a_1 k \quad (3.78)$$

Ο λόγος απόσβεσης για την ιδιομορφή n , σύμφωνα με τη θεώρηση αυτή, θα δίνεται από τη σχέση:

$$\zeta_n = \frac{a_0}{2} \frac{1}{\omega_n} + \frac{a_1}{2} \omega_n \quad (3.79)$$

Στο σχήμα 3.5 που ακολουθεί, παρουσιάζεται η εξάρτηση του λόγου απόσβεσης ζ από την ιδιοσυχνότητα ω , για κάθε ένα από τα τρία σχήματα απόσβεσης που εξετάστηκαν. Παρατηρούμε ότι το σχήμα του Rayleigh, υπερτερεί έναντι των άλλων δύο σχημάτων, καθώς επιτρέπει μία τιμή του λόγου απόσβεσης ζ να αντιστοιχηθεί σε δύο τιμές της ιδιοσυχνότητας ω .



Σχήμα 3.5. Διάγραμμα $\zeta = f(\omega)$, για κάθε ένα από τα εξεταζόμενα σχήματα απόσβεσης

Οι συντελεστές a_0 και a_1 , μπορούν να υπολογιστούν αντίστοιχα με τα προηγούμενα, βάση των επιθυμητών λόγων απόσβεσης ζ_i και ζ_j για δύο από τις N ιδιομορφές. Στη συνήθη περίπτωση που θα επιλεγούν ίδιοι συντελεστές απόσβεσης $\zeta_i = \zeta_j = \zeta$ και για τις δύο αυτές ιδιομορφές, οι συντελεστές αυτοί θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$a_0 = \zeta \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j} \quad \text{και} \quad a_1 = \zeta \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \quad (3.80)$$

Η απόσβεση Rayleigh είναι μία αρκετά αποδοτική μεθοδολογία που χρησιμοποιείται ευρέως στην πράξη, καθώς μας παρέχει τη δυνατότητα επιλογής των λόγων απόσβεσης για δύο ιδιομορφές. Οι ιδιομορφές αυτές πρέπει να επιλεγούν κατά τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλιστούν λογικές τιμές απόσβεσης και για τις υπόλοιπες ιδιομορφές που συμμετέχουν στην απόκριση του συστήματος.

Με άλλα αντίστοιχα και περισσότερο πολύπλοκα σχήματα, μπορούμε να συμπεριλάβουμε στην επιλογή των λόγων απόσβεσης και περισσότερες από δύο τιμές, οπότε θα έχουμε στις σχέσεις και περισσότερες από δύο σταθερές a_i .

Μη τυπική απόσβεση (Nonclassical damping)

Η υπόθεση της τυπικής απόσβεσης, όπως διατυπώθηκε στις προηγούμενες παραγράφους, δεν ενδείκνυται όταν το εξεταζόμενο σύστημα αποτελείται από διάφορα μέρη, τα οποία παρουσιάζουν μεγάλες διακυμάνσεις στην απόσβεσή τους. Χαρακτηριστική τέτοια περίπτωση είναι το σύστημα κατασκευής – εδάφους, στο οποίο η μεν κατασκευή παρουσιάζει λόγους αποσβέσεως της τάξεως του 2-5%, το δε έδαφος της τάξεως του 15-20%. Στις περιπτώσεις αυτές, αν και η υπόθεση της τυπικής απόσβεσης μπορεί να είναι λογική για την κατασκευή ή για το έδαφος ξεχωριστά, δεν είναι κατάλληλη για το σύστημα των δύο.

Στις περιπτώσεις αυτές, γίνεται η υπόθεση της τυπικής απόσβεσης για κάθε ένα από τα δύο υποσυστήματα και στη συνέχεια, το μητρώο απόσβεσης όλου του συστήματος μορφώνεται με κατάλληλη σύνδεση των δύο υπομητρώων.

3.5 Σύνοψη και σχόλια περί της μεθόδου των ιδιομορφών

Η μέθοδος υπέρθεσης των ιδιομορφών ή απλούστερα μέθοδος των ιδιομορφών (Classical mode superposition method ή Modal analysis), μετασχηματίζει όπως είδαμε τις συζευγμένες διαφορικές εξισώσεις κίνησης σε ισοδύναμες μη συζευγμένες, ανάγοντας έτσι το πολυβάθμιο σύστημα σε ένα σύνολο ανεξάρτητων μονοβαθμίων συστημάτων. Στη συνέχεια, η συνολική απόκριση μπορεί να υπολογιστεί με άθροιση (υπέρθεση) των μερικών αποκρίσεων λόγω της κάθε ιδιομορφής. Η δυνατότητα αυτή αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα της μεθόδου. Ένα επίσης σημαντικότατο πλεονέκτημα είναι το γεγονός ότι, γενικά, κατά την ανάλυση ιδιομορφών, απαιτείται ένας μικρός μόνο αριθμός από τις κατώτερες ιδιομορφές του φορέα για τον υπολογισμό της σεισμικής απόκρισης με ικανοποιητική ακρίβεια. Οι υπολογιστικές ευκολίες που συνεπάγονται τα δύο αυτά στοιχεία, είναι που έκαναν τη μέθοδο αυτή τόσο σημαντική για τον σύγχρονο μηχανικό και ευρέως εφαρμοζόμενη στην πράξη. Δεν είναι τυχαίο άλλωστε το γεγονός ότι στη συντριπτική τους πλειοψηφία, παγκοσμίως, οι αντισεισμικοί κανονισμοί βασίζονται στη δυναμική ανάλυση των κατασκευών με τη μέθοδο των ιδιομορφών. Οι κανονισμοί αυτοί διαφοροποιούνται όσον αφορά τη χρήση τη μεθόδου σε σχέση με όσα περιγράφηκαν στο παρόν κεφάλαιο, στο ότι δεν υπολογίζουν την απόκριση αναλυτικά για κάθε χρονική στιγμή, αλλά εκτιμούν τη μέγιστη τιμή της, με χρήση και της θεμελιώδους έννοιας του φάσματος αποκρίσεως. Στο κεφάλαιο των εφαρμογών (Κεφ. 5), θα αναφερθούμε εκτενέστερα στις τεχνικές αυτές.

Το σημαντικότερο μειονέκτημα της μεθόδου είναι ο περιορισμός της σε γραμμικά συστήματα και μάλιστα σε εκείνα μόνο στα οποία μπορεί να γίνει η υπόθεση της τυπικής απόσβεσης. Η γραμμικότητα προϋποτίθεται ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί η αρχή της υπερθέσεως, ενώ η απόσβεση απαιτείται να είναι τυπικής μορφής, ώστε οι προκύπτουσες διαφορικές εξισώσεις να είναι μη συζευγμένες και να μπορούν να αντιμετωπιστούν μεμονωμένα. Σε περιπτώσεις μη γραμμικών δυναμικών αναλύσεων ή/και συστημάτων με μη τυπική απόσβεση, χρησιμοποιούνται οι μέθοδοι της άμεσης αριθμητικής ολοκλήρωσης, οι οποίες παρουσιάζουν μεγαλύτερη γενικότητα αλλά και αυξημένο υπολογιστικό κόστος. Οι μέθοδοι αυτές, θα εξεταστούν αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο.

4

Μέθοδοι άμεσης ολοκλήρωσης

4.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, είδαμε πως διατυπώνεται το πρόβλημα της δυναμικής ισορροπίας και πώς μπορεί να επιλυθεί αυτό, αν πληρεί κάποιες προϋποθέσεις, μέσω κατάλληλου μετασχηματισμού του και χρήση της μεθόδου της υπέρθεσης των ιδιομορφών. Η μέθοδος των ιδιομορφών, όπως προειπώθηκε, μπορεί να εφαρμοστεί για τη δυναμική ανάλυση γραμμικών ελαστικών συστημάτων που εμφανίζουν τυπική απόσβεση. Μία άλλη κατηγορία μεθόδων επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν την κίνηση ενός μονοβαθμίου ή πολυβαθμίου συστήματος υποβαλλόμενου σε δυναμικές φορτίσεις είναι οι *μέθοδοι άμεσης ολοκλήρωσης* (Direct integration methods). Οι μέθοδοι αυτές είναι πιο γενικές, καθώς μπορούν να εφαρμοστούν τόσο για δυναμικές αναλύσεις γραμμικών συστημάτων με τυπική ή μη απόσβεση, όσο και για μη γραμμικές δυναμικές αναλύσεις. Σύμφωνα με τις μεθόδους αυτές, η μητρωική διαφορική εξίσωση κίνησης

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = p(t) \quad (4.1)$$

, ολοκληρώνεται με τη χρήση κάποιας αριθμητικής βήμα προς βήμα διαδικασίας. Λόγω της ισχύος και της εν γένει γενικότητας των μεθόδων αριθμητικής ολοκλήρωσης, οι διαφορικές εξισώσεις μπορούν να είναι σε οποιαδήποτε μορφή, συζευγμένες ή μη. Έτσι, ο όρος “άμεση” υποδηλώνει ότι πριν την αριθμητική ολοκλήρωση δεν απαιτείται μετασχηματισμός των αρχικών διαφορικών εξισώσεων κίνησης σε κάποια άλλη μορφή. Στην πράξη, υπάρχουν

περιπτώσεις που κάποιος μετασχηματισμός λαμβάνει χώρα, αυτό όμως γίνεται όχι εξαιτίας της αδυναμίας των μεθόδων να αντιμετωπίσουν αυτούσιο το αρχικό πρόβλημα, αλλά για τη διευκόλυνση των υπολογισμών και τη μείωση του υπολογιστικού κόστους.

Οι μέθοδοι άμεσης ολοκλήρωσης βασίζονται γενικά σε δύο ιδέες. Καταρχάς, οι μέθοδοι αυτές δεν αναζητούν μία λύση η οποία να ικανοποιεί την εξίσωση (4.1) για κάθε μεμονωμένη χρονική στιγμή t . Αντίθετα, γίνεται προσπάθεια να ικανοποιηθεί η (4.1) μονάχα για κάποιες διακριτές τιμές του χρόνου οι οποίες απέχουν μεταξύ τους κάποιο χρονικό διάστημα Δt , το οποίο τις περισσότερες φορές λαμβάνεται σταθερό για ευκολία των υπολογισμών. Επομένως, η στατική ισορροπία, η οποία εμπεριέχει και τις επιδράσεις των αδρανειακών δυνάμεων και των δυνάμεων απόσβεσης, εξετάζεται μόνο για κάποιες διακριτές τιμές του χρόνου. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι όλες οι τεχνικές επίλυσης που έχουν να κάνουν με στατική ανάλυση, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για τις επιλύσεις που απαιτεί κάθε βήμα της διαδικασίας άμεσης ολοκλήρωσης. Η δεύτερη ιδέα στην οποία βασίζονται οι μέθοδοι της άμεσης ολοκλήρωσης είναι ότι για κάθε ένα από τα χρονικά υποδιαστήματα Δt προϋποτίθεται μια μεταβολή μετατοπίσεων, ταχυτήτων και επιταχύνσεων. Το είδος της υπόθεσης που γίνεται για τις μεταβολές αυτές, είναι εκείνο που καθορίζει τελικά την ακρίβεια, τη σταθερότητα αλλά και το υπολογιστικό κόστος της διαδικασίας επίλυσης. Η απόκριση του συστήματος κατά τη διάρκεια των υποδιαστημάτων υπολογίζεται επομένως προσεγγιστικά, βάση ενός υποθετικού μηχανισμού αποκρίσεως, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η ισορροπία του συστήματος κατά τα διαστήματα αυτά.

4.2 Βασικές αρχές των μεθόδων άμεσης ολοκλήρωσης

Σκοπός των μεθόδων άμεσης ολοκλήρωσης είναι η αριθμητική επίλυση της μητρικής διαφορικής εξίσωσης κίνησης (4.1). Το συνολικό χρονικό διάστημα $t_{\text{ολ}}$ για το οποίο ζητείται η απόκριση του συστήματος, χωρίζεται σε n υποδιαστήματα σταθερής διάρκειας $\Delta t = t_{\text{ολ}} / n$. Η διέγερση καθορίζεται για κάθε μία από τις εξεταζόμενες διακριτές τιμές του χρόνου $t_i = i \cdot \Delta t$, μέσω των τιμών της $p_i = p(t_i)$. Η απόκριση του συστήματος $u_i = u(t_i)$, $\dot{u}_i = \dot{u}(t_i)$, $\ddot{u}_i = \ddot{u}(t_i)$ θα βρεθεί επίσης για κάθε διακριτή τιμή του χρόνου. Έστω ότι είναι γνωστή η απόκριση u_i , $\dot{u}_i$, $\ddot{u}_i$ του συστήματος, για τη χρονική στιγμή t_i . Η απόκριση αυτή, πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση ισορροπίας (4.1), επομένως:

$$m \cdot \ddot{u}_i + c \cdot \dot{u}_i + k \cdot u_i = p_i \quad (4.2)$$

Οι μέθοδοι άμεσης ολοκλήρωσης μας παρέχουν την απόκριση του συστήματος για τη χρονική στιγμή t_{i+1} , η οποία επίσης ικανοποιεί τη συνθήκη ισορροπίας (4.1):

$$m \cdot \ddot{u}_{i+1} + c \cdot \dot{u}_{i+1} + k \cdot u_{i+1} = p_{i+1} \quad (4.3)$$

Αν εφαρμοστεί σωστά, για $i = 0, 1, 2, \dots, n$ η βήμα προς βήμα διαδικασία μας δίνει την απόκριση του συστήματος για κάθε εξεταζόμενη διακριτή χρονική στιγμή, οπότε με τον τρόπο αυτόν μορφώνεται ο γενικός αλγόριθμος. Οι γνωστές αρχικές συνθήκες για $i = 0$, μας παρέχουν τις απαραίτητες πληροφορίες για την έναρξη της διαδικασίας. Αξίζει να σημειωθεί ότι αρκούν δύο μόνο από τα διανύσματα u_0 , $\dot{u}_0$, $\ddot{u}_0$, για τον πλήρη προσδιορισμό των αρχικών συνθηκών, καθώς το τρίτο από αυτά μπορεί να προσδιοριστεί μονοσήμαντα από την εξίσωση ισορροπίας (4.2), για τη χρονική στιγμή μηδέν ($i = 0$).

Η αριθμητική διαδικασία απαιτεί τρεις μητρωικές εξισώσεις προκειμένου να προσδιοριστούν τα άγνωστα διανύσματα u_{i+1} , $\dot{u}_{i+1}$, $\ddot{u}_{i+1}$. Οι δύο από τις εξισώσεις αυτές προκύπτουν είτε από εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών για την ταχύτητα και την επιτάχυνση, είτε από άλλη υπόθεση που έχει γίνει σχετικά με τη μεταβολή της απόκρισης μεταξύ των διακριτών τιμών του χρόνου. Η τρίτη απαιτούμενη εξίσωση είναι η εξίσωση ισορροπίας (4.1), εφαρμοζόμενη για μία επιλεγμένη διακριτή τιμή του χρόνου. Αν επιλεγεί η τρέχουσα χρονική στιγμή t_i (σχέση 4.2), τότε η χρησιμοποιούμενη μέθοδος καλείται *explicit method*, ενώ αν επιλεγεί η χρονική t_{i+1} του τέλους κάθε βήματος (σχέση 4.3), τότε η μέθοδος καλείται *implicit method*.

Για να είναι μία τέτοια αριθμητική διαδικασία χρήσιμη, πρέπει να ικανοποιεί τα παρακάτω κριτήρια:

- (i) Να οδηγεί σε σύγκλιση προς την ακριβή λύση του προβλήματος, καθώς το βήμα Δt μικραίνει.
- (ii) Να ανταποκρίνεται με σταθερότητα στην ενδεχόμενη ύπαρξη μικροσφαλμάτων στρογγυλοποίησης.

(iii) Να είναι ακριβής, δηλαδή τα υπολογιστικά σφάλματα να είναι ανεκτά και η προκύπτουσα από τη διαδικασία λύση να είναι κοντά στην ακριβή λύση του προβλήματος.

4.3 Μέθοδος των κεντρικών διαφορών

Η Μέθοδος των κεντρικών διαφορών (Central difference method) βασίζεται σε μία προσέγγιση των παραγώγων της μετατόπισης (δηλ. της ταχύτητας και της επιτάχυνσης), μέσω της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, οι ταχύτητες και οι επιταχύνσεις για τη χρονική στιγμή t_i , δίνονται από τις σχέσεις:

$$\dot{u}_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t} \quad (4.4)$$

$$\ddot{u}_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta t)^2} \quad (4.5)$$

Με αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στην εξίσωση ισορροπίας (4.2), παίρνουμε:

$$m \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t} + c \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta t)^2} + ku_i = p_i \quad (4.6)$$

Στην παραπάνω εξίσωση (4.6), τα μεγέθη u_i και u_{i-1} θεωρούνται γνωστά, επομένως μεταφέροντάς τα στο δεξί μέλος της εξίσωσης, έχουμε:

$$\left[\frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t} \right] u_{i+1} = p_i - \left[\frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{2\Delta t} \right] u_{i-1} - \left[k - \frac{2m}{(\Delta t)^2} \right] u_i \quad (4.7)$$

$$\text{ή} \quad \hat{k} u_{i+1} = \hat{p}_i \quad (4.8)$$

$$\text{, όπου} \quad \hat{k} = \frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t} \quad (4.9)$$

$$\text{και} \quad \hat{p}_i = p_i - \left[\frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{2\Delta t} \right] u_{i-1} - \left[k - \frac{2m}{(\Delta t)^2} \right] u_i \quad (4.10)$$

Από τη σχέση (4.8), μπορεί να υπολογιστεί το άγνωστο διάνυσμα u_{i+1} . Το διάνυσμα αυτό όπως είδαμε, υπολογίζεται χωρίς τη χρήση της εξίσωσης ισορροπίας για τη χρονική στιγμή t_{i+1} (σχέση 4.2). Οι ελαστικές δυνάμεις και οι δυνάμεις απόσβεσης υπολογίζονται βάση των γνωστών μετατοπίσεων u_i και u_{i-1} και των γνωστών ταχυτήτων $\dot{u}_i$ και $\dot{u}_{i-1}$. Τέτοιες μέθοδοι καλούνται, όπως προειπώθηκε, *explicit methods*.

Όπως είδαμε, για να υπολογιστεί το μέγεθος u_{i+1} , απαιτείται να είναι γνωστά τα μεγέθη u_i και u_{i-1} . Επομένως, για το πρώτο βήμα, απαιτείται εκτός από τη γνωστή αρχική μετατόπιση u_0 και το μέγεθος u_{-1} , το οποίο δεν έχει μεν φυσική σημασία, χρειάζεται όμως προκειμένου να γίνουν οι αριθμητικοί υπολογισμοί. Αυτό μπορεί να βρεθεί, αν τεθεί $i = 0$ στις σχέσεις (4.4) και (4.5), οπότε παίρνουμε:

$$u_{-1} = u_0 - \Delta t \cdot \dot{u}_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{u}_0 \quad (4.11)$$

Αν θεωρήσουμε ότι οι αρχικές συνθήκες u_0 και $\dot{u}_0$ είναι γνωστές, τότε η αρχική επιτάχυνση $\ddot{u}_0$ που υπεισέρχεται στην παραπάνω σχέση, μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση ισορροπίας (4.2), για $i = 0$:

$$\ddot{u}_0 = \frac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m} \quad (4.12)$$

Ένα σημαντικό στοιχείο που αφορά τη μέθοδο των κεντρικών διαφορών είναι ότι για να δώσει λογικά αποτελέσματα, πρέπει το χρονικό βήμα Δt που έχει επιλεγεί να είναι αρκετά μικρό, και συγκεκριμένα μικρότερο μίας κρίσιμης τιμής T_{cr} . Σε διαφορετική περίπτωση η διαδικασία θα παρουσιάσει αστάθεια. Η απαίτηση που τίθεται για την ευστάθεια, είναι:

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T_n}{\pi} \quad (4.13)$$

, όπου T_n είναι η μικρότερη ιδιοπερίοδος του συστήματος. Στην πράξη, η εξίσωση (4.13) πολλές φορές δεν επιβάλλει ιδιαίτερα μικρές τιμές του Δt , όμως για λόγους ακρίβειας των υπολογισμών, το βήμα αυτό πρέπει εν γένει να έχει αρκετά μικρή τιμή. Άλλωστε, στην περίπτωση δυναμικών καταπονήσεων λόγω σεισμού, το βήμα Δt απαιτείται να είναι της

τάξης του 0.01 έως 0.02 sec, ώστε να καθοριστεί με ακρίβεια η εδαφική επιτάχυνση. Τέτοιες μέθοδοι, οι οποίες παρουσιάζουν ευστάθεια μόνο όταν το βήμα Δt είναι μικρότερο από κάποια τιμή, καλούνται *υπό όρους ευσταθείς μέθοδοι* (conditionally stable methods). Το υπολογιστικό κόστος της ανάλυσης είναι περίπου ανάλογο με το πλήθος των απαιτούμενων βημάτων της διαδικασίας χρονικής ολοκλήρωσης και επομένως αντιστρόφως ανάλογο με το βήμα Δt αυτής. Αυτό σημαίνει πρακτικά ότι αν σε κάποια ανάλυση το βήμα επιλεγεί m φορές μεγαλύτερο, τότε το υπολογιστικό κόστος θα γίνει m φορές μικρότερο.

Στον πίνακα 4.1 που ακολουθεί, παρουσιάζεται συνοπτικά η μέθοδος των κεντρικών διαφορών, βήμα προς βήμα, όπως μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα πρόγραμμα H/Y.

Πίνακας 4.1. Μέθοδος των κεντρικών διαφορών: Γραμμικά συστήματα

1. Αρχικοί υπολογισμοί

1.1 Μόρφωσε το μητρώο δυσκαμψίας k , το μητρώο μάζας m και το μητρώο απόσβεσης c .

1.2 Καθόρισε τις αρχικές συνθήκες $u_0, \dot{u}_0, \ddot{u}_0$.

1.3 Επέλεξε το βήμα του χρόνου Δt , $\Delta t < \Delta t_{cr}$

1.4 Υπολόγισε το $u_{-1} = u_0 - \Delta t \cdot \dot{u}_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{u}_0$

1.5 Μόρφωσε το ενεργό μητρώο δυσκαμψίας:

$$\hat{k} = \frac{1}{(\Delta t)^2} m + \frac{1}{2\Delta t} c$$

1.6 Υπολόγισε τα μητρώα:

$$a = \frac{1}{(\Delta t)^2} m - \frac{1}{2\Delta t} c, \quad b = k - \frac{2}{(\Delta t)^2} m$$

2. Υπολογισμοί για κάθε χρονικό βήμα i .

2.1 Υπολόγισε το ενεργό φορτίο: $\hat{p}_i = p_i - au_{i-1} - bu_i$

2.2 Λύσε την εξίσωση: $\hat{k}u_{i+1} = \hat{p}_i \Rightarrow u_{i+1} = \dots$

2.3 Αν χρειάζεται:

$$\dot{u}_i = \frac{1}{2\Delta t}(u_{i+1} - u_i), \quad \ddot{u}_i = \frac{1}{(\Delta t)^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$$

3. Επανάληψη της διαδικασίας για κάθε επόμενο βήμα.

3.1 Αντικατέστησε το i με το $i+1$ και επανέλαβε τα βήματα 2.1 έως 2.3

Άλλες διατυπώσεις τις μεθόδου, χρησιμοποιούν το ενεργό μητρώο μάζας αντί του ενεργού μητρώου δυσκαμνίας στους υπολογισμούς τους, ή εισάγουν βοηθητικές μεταβλητές προκειμένου να κάνουν πιο ξεκάθαρους τους αριθμητικούς υπολογισμούς. Σε κάθε περίπτωση όμως, οι διαφοροποιήσεις αυτές πραγματοποιούνται σε καθαρά υπολογιστικό επίπεδο, χωρίς να αλλάζει κάτι επί της ουσίας της διαδικασίας, και επομένως το προκύπτον αποτέλεσμα είναι το ίδιο.

Όπως προειπώθηκε, οι μέθοδοι άμεσης ολοκλήρωσης είναι σε θέση να επιλύσουν οποιοδήποτε δυναμικό πρόβλημα αυτούσιο, δηλαδή χωρίς να έχει γίνει πρώτα μετασχηματισμός των αρχικών διαφορικών εξισώσεων σε άλλη μορφή. Συχνά στην πράξη όμως, για ευκολία των υπολογισμών αλλά και για μείωση του αριθμητικού σφάλματος και όταν το πρόβλημα το επιτρέπει, πραγματοποιείται σε αντιστοιχία με την μέθοδο των ιδιομορφών, μετασχηματισμός των εξισώσεων στις φυσικές συντεταγμένες του συστήματος. Επομένως, αντί για τις μετατοπίσεις u_i , τίθενται στη διαδικασία ως άγνωστα τα γενικευμένα μεγέθη q_i της σχέσης $u = \Phi q$.

4.4 Μέθοδος Newmark

Το 1959, ο N. M. Newmark, ανέπτυξε μία οικογένεια αριθμητικών βήμα προς βήμα μεθόδων, οι οποίες βασίζονται στις παρακάτω εξισώσεις:

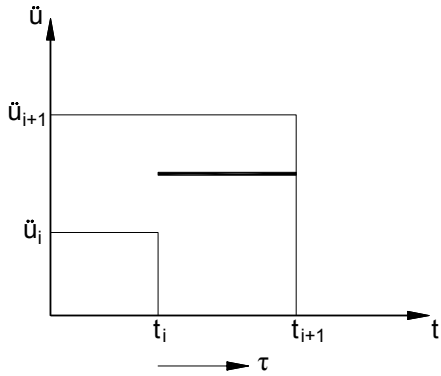
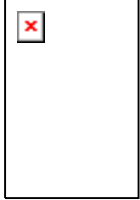
$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + [(1 - \gamma)\Delta t]\ddot{u}_i + \gamma\Delta t \cdot \ddot{u}_{i+1} \quad (4.14)$$

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t \cdot \dot{u}_i + [(0.5 - \beta)(\Delta t)^2]\ddot{u}_i + [\beta(\Delta t)^2]\ddot{u}_{i+1} \quad (4.15)$$

Οι παράμετροι β και γ επηρεάζουν τον τρόπο που μεταβάλλεται η επιτάχυνση σε ένα χρονικό υποδιάστημα Δt και καθορίζουν τη σταθερότητα και την ακρίβεια της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Χαρακτηριστικές τιμές των παραμέτρων αυτών είναι $\gamma = \frac{1}{2}$ και $\frac{1}{6} \leq \beta \leq \frac{1}{4}$, οι οποίες δίνουν γενικά καλά αποτελέσματα, τόσο από άποψη ακρίβειας, όσο και από άποψη ευστάθειας της μεθόδου. Οι δύο παραπάνω εξισώσεις, μαζί με την εξίσωση ισορροπίας (4.2) για το τέλος του κάθε υποδιαστήματος, δηλαδή για τη χρονική στιγμή t_{i+1} , μας δίνουν τις τρεις απαραίτητες εξισώσεις για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος. Εφόσον η ισορροπία εξετάζεται τη χρονική στιγμή t_{i+1} , η μέθοδος Newmark είναι μία *implicit method*.

Το σχήμα της μεθόδου το οποίο πρότεινε αρχικά ο Newmark, είναι αυτό που προκύπτει για $\gamma = \frac{1}{2}$ και $\beta = \frac{1}{4}$. Η προκύπτουσα μέθοδος για αυτές τις τιμές των παραμέτρων, ονομάζεται *μέθοδος μέσης επιταχύνσεως* (Average acceleration method). Άλλο χαρακτηριστικό ζεύγος τιμών των παραμέτρων είναι το $\gamma = \frac{1}{2}$ και $\beta = \frac{1}{6}$, για το οποίο έχουμε τη μέθοδο γραμμικής επιτάχυνσης (Linear acceleration method). Για κάθε μία από τις δύο αυτές μεθόδους, στον πίνακα 4.2 που ακολουθεί, παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο προϋποτίθεται ότι μεταβάλλεται η επιτάχυνση κατά το διάστημα Δt , δηλαδή μεταξύ δύο διαδοχικών διακριτών τιμών του χρόνου t_i και t_{i+1} . Στην πρώτη περίπτωση θεωρούμε ότι η επιτάχυνση δεν μεταβάλλεται, αλλά λαμβάνει τη μέση τιμή των $\ddot{u}_i$ και $\ddot{u}_{i+1}$ καθ' όλο το διάστημα Δt , σύμφωνα με τη σχέση (4.16). Στη δεύτερη περίπτωση, θεωρούμε ότι η επιτάχυνση μεταβάλλεται γραμμικά ως προς τον χρόνο από την τιμή $\ddot{u}_i$ στην τιμή $\ddot{u}_{i+1}$, σύμφωνα με τη σχέση (4.17).

Πίνακας 4.2. Μέθοδοι μέσης και γραμμικής επιταχύνσεως

Μέση επιτάχυνση (Average acceleration)	Γραμμική επιτάχυνση (Linear acceleration)
$\gamma = \frac{1}{2}$ και $\beta = \frac{1}{4}$.	$\gamma = \frac{1}{2}$ και $\beta = \frac{1}{6}$.
	
$\ddot{u}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i) \quad (4.16)$	$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}_i + \frac{\tau}{\Delta t}(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i) \quad (4.17)$
$\dot{u}(\tau) = \dot{u}_i + \frac{\tau}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$	$\dot{u}(\tau) = \dot{u}_i + \ddot{u}_i \tau + \frac{\tau^2}{2\Delta t}(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i)$
$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$	$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$
$u(\tau) = u_i + \dot{u}_i \tau + \frac{\tau^2}{4}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$	$u(\tau) = u_i + \dot{u}_i \tau + \ddot{u}_i \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{6\Delta t}(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i)$
$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{4}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$	$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t + (\Delta t)^2 \left(\frac{1}{6} \ddot{u}_{i+1} + \frac{1}{3} \ddot{u}_i \right)$

Στον πίνακα 4.2 που ακολουθεί, παρουσιάζεται συνοπτικά η μέθοδος Newmark, βήμα προς βήμα, όπως μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα πρόγραμμα Η/Υ.

Πίνακας 4.2. Μέθοδος Newmark: Γραμμικά συστήματα

Ειδικές περιπτώσεις

(α) Μέθοδος μέσης επιταχύνσεως (Average acceleration method), $\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{4}$

(β) Μέθοδος γραμμικής επιτάχυνσης (Linear acceleration method), $\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{6}$

1. Αρχικοί υπολογισμοί

1.1 Μόρφωσε το μητρώο δυσκαμψίας k , το μητρώο μάζας m και το μητρώο απόσβεσης c .

1.2 Καθόρισε τις αρχικές συνθήκες u_0 , $\dot{u}_0$, $\ddot{u}_0$.

1.3 Επέλεξε το βήμα του χρόνου Δt και τις παραμέτρους γ και β , για τις οποίες, πρέπει:

$$\gamma \geq 0.50, \quad \beta \geq 0.25(0.5 + \gamma)^2$$

1.4 Μόρφωσε το ενεργό μητρώο δυσκαμψίας:

$$\hat{k} = k + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} c + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} m$$

1.5 Υπολόγισε τα μητρώα:

$$a = \frac{1}{\beta \Delta t} m + \frac{\gamma}{\beta} c, \quad b = \frac{1}{2\beta} m + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) c$$

2. Υπολογισμοί για κάθε χρονικό βήμα i .

$$2.1 \quad \Delta \hat{p}_i = \Delta p_i + a \dot{u}_i + b \ddot{u}_i$$

$$2.2 \quad \text{Λύσε την εξίσωση: } \hat{k} \cdot \Delta u_i = \Delta \hat{p}_i \Rightarrow \Delta u_i = \dots$$

2.3 Υπολόγισε τα διανύσματα:

$$\Delta \dot{u}_i = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta u_i - \frac{\gamma}{\beta} \dot{u}_i + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{u}_i$$

$$\Delta \ddot{u}_i = \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \Delta u_i - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{u}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{u}_i$$

2.4 Υπολόγισε την απόκριση για τη χρονική στιγμή $i+1$:

$$u_{i+1} = u_i + \Delta u_i$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta \dot{u}_i$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta \ddot{u}_i$$

3. Επανάληψη της διαδικασίας για κάθε επόμενο βήμα.

3.1 Αντικατέστησε το i με το $i+1$ και επανέλαβε τα βήματα 2.1 έως 2.4

4.5 Άλλες μέθοδοι

Στις δύο προηγούμενες παραγράφους αναφερθήκαμε σε δύο σημαντικές μεθόδους άμεσης ολοκλήρωσης, τη μέθοδο των κεντρικών διαφορών και τη μέθοδο Newmark. Η πρώτη είναι η πιο θεμελιώδης και απλή μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης, ενώ η δεύτερη είναι η μέθοδος που εφαρμόστηκε στα πλαίσια των εφαρμογών της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Εκτός από αυτές, υπάρχουν και άλλες γνωστές μέθοδοι άμεσης αριθμητικής ολοκλήρωσης, οι οποίες θα παρουσιαστούν συνοπτικά στις επόμενες παραγράφους.

4.5.1 Η μέθοδος Houbolt

Η μέθοδος Houbolt (Houbolt method) είναι κατά κάποιον τρόπο συγγενής με τη μέθοδο των κεντρικών διαφορών, με την έννοια ότι και αυτή βασίζεται σε εκφράσεις πεπερασμένων διαφορών προκειμένου να εκφράσει την ταχύτητα και την επιτάχυνση με όρους της μετατόπισης. Οι σχέσεις στις οποίες βασίζεται η μέθοδος αυτή είναι οι εξής:

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{\Delta t^2} (2u_{i+1} - 5u_i + 4u_{i-1} - u_{i-2}) \quad (4.18)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{1}{6\Delta t} (11u_{i+1} - 18u_i + 9u_{i-1} - 2u_{i-2}) \quad (4.19)$$

Η μέθοδος Houbolt διαφοροποιείται σε σχέση με τη μέθοδο των κεντρικών διαφορών σε δύο σημεία. Πρώτα από όλα, στο ότι λαμβάνει την εξίσωση ισορροπίας κατά τη χρονική στιγμή t_{i+1} , πρόκειται επομένως για μία *implicit method*, και κατά δεύτερο λόγο στο ότι σε αντίθεση με τη μέθοδο κεντρικών διαφορών, παρουσιάζει άνευ όρων ευστάθεια, είναι επομένως μία *άνευ όρων ευσταθής μέθοδος* (unconditionally stable method).

4.5.2 Η Wilson θ μέθοδος

Η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε από τον E. L. Wilson και αποτελεί μία επέκταση της μεθόδου της γραμμικής επιταχύνσεως. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, η επιτάχυνση μεταβάλλεται γραμμικά για ένα εκτεταμένο χρονικό διάστημα από t έως $t + \theta \cdot \Delta t$, όπου

$\theta \geq 1.0$. Η ακρίβεια και η ευστάθεια της μεθόδου, εξαρτώνται από την επιλογή της παραμέτρου θ . Για $\theta = 1.0$, η μέθοδος ανάγεται στη μέθοδο της γραμμικής επιταχύνσεως, όπως την είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο.

Έστω ότι το μέγεθος τ καθορίζει την αύξηση του χρόνου για το εκτεταμένο χρονικό βήμα, επομένως $0 \leq \tau \leq \theta \cdot \Delta t$. Η επιτάχυνση για το διάστημα αυτό σύμφωνα με την Wilson θ μέθοδο, θα δίνεται από τη σχέση:

$$\ddot{u}_{t+\tau} = \ddot{u}_t + \frac{\tau}{\theta \cdot \Delta t} (\ddot{u}_{t+\theta \Delta t} - \ddot{u}_t) \quad (4.20)$$

Με ολοκλήρωση της παραπάνω σχέσης, παίρνουμε:

$$\dot{u}_{t+\tau} = \dot{u}_t + \ddot{u}_t \tau + \frac{\tau^2}{2\theta \cdot \Delta t} (\ddot{u}_{t+\theta \Delta t} - \ddot{u}_t) \quad (4.21)$$

$$, \text{ και } u_{t+\tau} = u_t + \dot{u}_t \tau + \frac{1}{2} \ddot{u}_t \tau^2 + \frac{1}{6\theta \cdot \Delta t} \tau^3 (\ddot{u}_{t+\theta \Delta t} - \ddot{u}_t) \quad (4.22)$$

Η Wilson θ μέθοδος είναι μία *implicit method*. Για $\theta \geq 1.37$, η μέθοδος είναι άνευ όρων ευσταθής, ενώ η τιμή $\theta = 1.42$ δίνει βέλτιστη ακρίβεια.

4.6 Ευστάθεια των μεθόδων

Η ευστάθεια μίας μεθόδου αριθμητικής ολοκλήρωσης έγκειται γενικά στα ακόλουθα:

(i) Για σχετικά μεγάλες τιμές του βήματος Δt (ή καλύτερα του λόγου $\Delta t/T$), η μέθοδος δεν πρέπει να οδηγεί σε ανεξέλεγκτα μεγάλες τιμές της απόκρισης, καθώς σε αυτήν την περίπτωση, η ολοκλήρωση των υψηλότερων μορφών αντί να οδηγήσει σε ακριβέστερες λύσεις θα προκαλέσει προβλήματα ευσταθείας στη διαδικασία.

(ii) Τα μικροσφάλματα που προκαλούνται λόγω της στρογγυλοποίησης των αριθμητικών τιμών των μετατοπίσεων, ταχυτήτων και επιταχύνσεων από τον H/Y δεν πρέπει να “διογκώνονται” κατά τη διαδικασία της ολοκλήρωσης.

Όπως προειπώθηκε, οι μέθοδοι εκείνες οι οποίες οδηγούν σε καθορισμένη λύση μόνο εάν το βήμα Δt είναι μικρότερο από ένα συγκεκριμένο όριο ευστάθειας, καλούνται *υπό όρους ευσταθείς μέθοδοι* (conditionally stable methods). Από την άλλη, οι μέθοδοι εκείνες οι οποίες οδηγούν σε καθορισμένη λύση ανεξάρτητα από την επιλογή του βήματος Δt , καλούνται *άνευ όρων ευσταθείς μέθοδοι* (unconditionally stable methods). Η μέθοδος μέσης επιταχύνσεως είναι άνευ όρων ευσταθής. Η μέθοδος γραμμικής επιταχύνσεως είναι ευσταθής μόνο αν $\Delta t / T_n < 0.551$, ενώ η μέθοδος κεντρικών διαφορών είναι ευσταθής μόνο για $\Delta t / T_n < 1/\pi$.

Τα κριτήρια ευστάθειας δεν είναι εν γένει περιοριστικά όσον αφορά τη δυναμική ανάλυση μονοβαθμίων συστημάτων, καθώς τις περισσότερες φορές υπερκαλύπτονται από τα κριτήρια ακριβείας των μεθόδων. Δεν ισχύει όμως το ίδιο και για την ανάλυση πολυβαθμίων συστημάτων, στα οποία οι ιδιοπερίοδοι κάποιων ανώτερων μορφών που συμμετέχουν στην απόκριση ενδέχεται να είναι πολύ μικρές και επομένως τα κριτήρια ευστάθειας είναι εκείνα τα οποία καθορίζουν στις περιπτώσεις αυτές την τιμή του βήματος Δt . Για τον λόγο αυτό, στην ανάλυση πολυβαθμίων συστημάτων χρησιμοποιούνται πιο συχνά άνευ όρων ευσταθείς μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης για τις οποίες αρκεί να ικανοποιούνται τα κριτήρια ακριβείας.

4.7 Ακρίβεια των μεθόδων

Η ακρίβεια μίας μεθόδου άμεσης ολοκλήρωσης εξαρτάται άμεσα από την επιλογή του χρονικού βήματος Δt . Παράλληλα, η επιλογή του βήματος Δt καθορίζει το πλήθος των απαιτούμενων επαναλήψεων, και άρα το συνολικό υπολογιστικό κόστος της διαδικασίας. Επομένως, η επιλογή του Δt σε κάθε περίπτωση θα πρέπει αφενός να εξασφαλίζει επαρκή ακρίβεια στους υπολογισμούς, και αφετέρου να οδηγεί στη λύση μέσα σε εύλογο αριθμό επαναλήψεων.

Αν χρησιμοποιείται ένας αλγόριθμος υπό όρους ευσταθής, τότε το βήμα καθορίζεται συχνά από την οριακή τιμή Δt_{cr} της ευστάθειας. Στην περίπτωση μίας άνευ όρων ευσταθούς μεθόδου όμως, το Δt θα καθοριστεί από τις απαιτήσεις ακριβείας. Ένας κάπως εμπειρικός, αλλά αρκετά αποδοτικός τρόπος επιλογής του βήματος Δt προκειμένου να εξασφαλιστεί επαρκής ακρίβεια είναι ο ακόλουθος: Λύνεται το πρόβλημα για κάποια λογική αρχική τιμή του Δt και στη συνέχεια πραγματοποιείται νέα επίλυση με βήμα $\Delta t / 2$. Αν τα αποτελέσματα

των δύο επιλύσεων είναι “επαρκώς” κοντά μεταξύ τους, τότε η αρχική επιλογή του Δt είναι “επαρκώς” ικανοποιητική και ακριβής, ενώ σε αντίθετη περίπτωση πραγματοποιείται νέα επίλυση με βήμα $\Delta t / 4$ κ.ο.κ. ώσπου να επέλθει σύγκλιση.

Ένα φαινόμενο το οποίο παρουσιάζουν συχνά κάποιες μέθοδοι, όπως η Wilson θ μέθοδος, όταν το βήμα Δt δεν είναι αρκετά μικρό, είναι αυτό της τεχνητής απόσβεσης (Numerical damping). Το φαινόμενο αυτό είναι γενικότερο, γίνεται όμως πιο άμεσα αντιληπτό όταν εφαρμοστεί η μέθοδος για ένα σύστημα χωρίς απόσβεση, υποβαλλόμενο για παράδειγμα σε μία αρμονική φόρτιση. Το εύρος της ταλάντωσης, απουσία απόσβεσης, θα έπρεπε να παραμένει σταθερό καθ’ όλο το εξεταζόμενο χρονικό διάστημα. Το αποτέλεσμα όμως που λαμβάνουμε από τη διαδικασία της χρονικής ολοκλήρωσης είναι μία ταλάντωση στην οποία το εύρος μειώνεται και αντίστοιχα η περίοδος επιμηκύνεται με τον χρόνο. Αυτός ο μηχανισμός μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας τύπος τεχνητής αποσβέσεως, η οποία προστίθεται στην πραγματική απόσβεση του συστήματος.

Σε κάποιες περιπτώσεις, η επίδραση της τεχνητής απόσβεσης ενδέχεται να μην είναι σημαντική, καθώς η τιμή της μπορεί να ενταχθεί μέσα στα όρια ανακρίβειας προσδιορισμού της πραγματικής απόσβεσης. Σε κάθε περίπτωση όμως, το χρονικό βήμα θα πρέπει να επιλέγεται αρκετά βραχύ ώστε η απόκριση όλων των σημαντικών συνιστωσών μορφών να λαμβάνεται χωρίς ιδιαίτερη τεχνητή μείωση. Η σημαντική μείωση εύρους μπορεί αντίθετα να γίνει αποδεκτή για τις συνιστώσες υψηλότερων συχνοτήτων, των οποίων η συνεισφορά στη συνολική απόκριση του συστήματος είναι ούτως ή άλλως μικρή. Με αυτήν την λογική, ο μηχανισμός μείωσης του εύρους μπορεί να θεωρηθεί αντίστοιχος με την ηθελημένη περικοπή μορφών που εφαρμόζεται στη μέθοδο υπερθέσεως μορφών.

5

Εφαρμογές

5.1 Γενικά στοιχεία

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας ασχοληθήκαμε με τον βέλτιστο σχεδιασμό των γεωμετρικών χαρακτηριστικών των διατομών των κατασκευών υπό δυναμικές φορτίσεις. Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης που εξετάστηκαν δεν εφαρμόστηκαν σε μαθηματικές συναρτήσεις, αλλά σε μοντέλα πραγματικών κατασκευών. Δεν διερευνήθηκε επομένως η αποδοτικότητα τους απλά ως μαθηματικές μέθοδοι, αλλά η δυνατότητά τους να δώσουν λύση σε πολύπλοκα προβλήματα βέλτιστου σχεδιασμού κατασκευών, τα οποία παρουσιάζουν διαφοροποιήσεις και ιδιαιτερότητες.

Το πρόβλημα που αντιμετωπίστηκε είναι θεωρητικά δύο τάξεις μεγέθους δυσκολότερο από ένα απλό πρόβλημα γραμμικής ανάλυσης ενός φορέα, καθώς πραγματοποιήθηκε βελτιστοποίηση και δυναμική ανάλυση ταυτόχρονα, κάθε μία από τις οποίες μπορεί να υποτεθεί γενικά ότι αυξάνει την πολυπλοκότητα και τη δυσκολία του προβλήματος κατά μία τάξη μεγέθους. Στην πράξη, όπως θα φανεί από τους χρόνους επίλυσης παρακάτω, το πρόβλημα ήταν τελικά, από υπολογιστικής τουλάχιστον άποψης, ακόμη πιο δύσκολο.

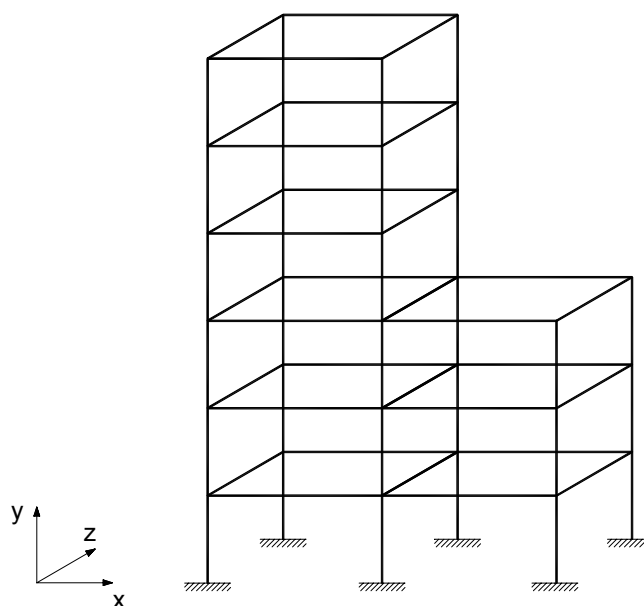
Ο φορέας που εξετάστηκε είναι ένα εξαώροφο χωρικό πλαίσιο από χάλυβα, ενώ οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν για τη βελτιστοποίηση είναι οι Στρατηγικές Εξέλιξης πολλών μελών (M-ES). Για να προσεγγιστεί το πρόβλημα από μία πιο πρακτική σκοπιά, επιλέχτηκε οι μεταβλητές σχεδιασμού να παίρνουν διακριτές μόνον τιμές. Οι δυναμικές αναλύσεις που απαιτούνται για τον έλεγχο των περιορισμών του προβλήματος σε κάθε βήμα

της διαδικασίας βελτιστοποίησης, έγιναν με δύο μεθόδους, τη μέθοδο της χρονικής ολοκλήρωσης και τη μέθοδο της επαλληλίας των ιδιομορφών στην απλοποιημένη της μορφή, όπως την περιγράφει ο Νέος Ελληνικός Αντισεισμικός Κανονισμός (NEAK).

Η εύρεση του ελάχιστου βάρους της εξεταζόμενης κατασκευής δεν ήταν σε καμία περίπτωση αυτοσκοπός για τη διπλωματική αυτή εργασία. Αντίθετα, στόχος ήταν η βαθύτερη παραμετρική διερεύνηση του προβλήματος, η εξέταση των προτερημάτων και των μειονεκτημάτων των μεθόδων που εφαρμόστηκαν και τελικά η εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων πάνω στα θέματα αυτά.

5.2 Φορέας

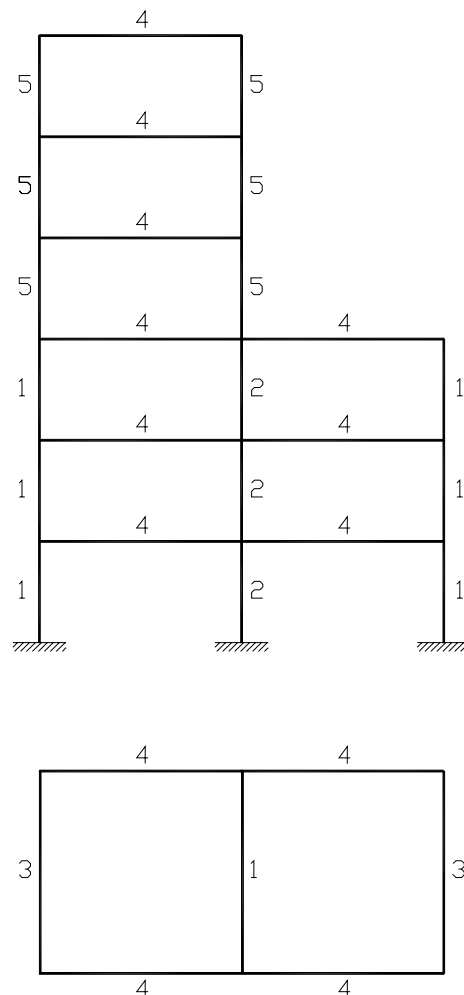
Ο φορέας που εξετάστηκε αναλύθηκε αρχικά από τους Orbinson et al, το 1982. Πρόκειται για ένα εξαόροφο χωρικό πλαίσιο με 36 κόμβους, 216 βαθμούς ελευθερίας (180 ενεργούς) και 63 ραβδωτά στοιχεία διατομής διπλού ταύ (I), χωρισμένα σε 5 ομάδες. Οι δοκοί έχουν μήκος 288 in (7.32 m), και τα υποστυλώματα ύψος 144 in (3.66 m). Το μέτρο ελαστικότητας είναι $E=29000$ ksi (200 GPa), ενώ η τάση διαρροής των μελών είναι $\sigma_y=36$ ksi (250 MPa). Ο λόγος του Poisson είναι $\nu=0.30$ και επομένως σύμφωνα με τη σχέση $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, το μέτρο διάτμησης G είναι 11153.8 ksi (76.92 GPa).



Σχήμα 5.1. Προοπτική άποψη του εξεταζόμενου εξαόροφου πλαισίου

Εκτός από τα δυναμικά φορτία, η κατασκευή καταπονείται και από στατικά φορτία, τα οποία είναι δύο ειδών: 19.16 kN/m^2 ομοιόμορφο κατακόρυφο φορτίο πάνω σε όλα τα επίπεδα των ορόφων, το οποίο κατανέμεται ως συγκεντρωμένο στους κόμβους, και 107 kN οριζόντιο φορτίο, το οποίο ασκείται σε κάθε κόμβο στην εμπρός πλευρά της διεύθυνσης x.

Στο σχήμα 5.1 της προηγούμενης σελίδας, παρουσιάστηκε μία προοπτική τρισδιάστατη άποψη της εξεταζόμενης κατασκευής. Στο σχήμα 5.2 που ακολουθεί, δείχνεται η πλάγια όψη και η κάτοψη του φορέα. Η αρίθμηση αναφέρεται στην ομαδοποίηση των στοιχείων του φορέα σε πέντε ομάδες.



Σχήμα 5.2. Πλάγια όψη και κάτοψη του εξαόροφου πλαισίου

5.3 Στοιχεία που αφορούν τη βελτιστοποίηση

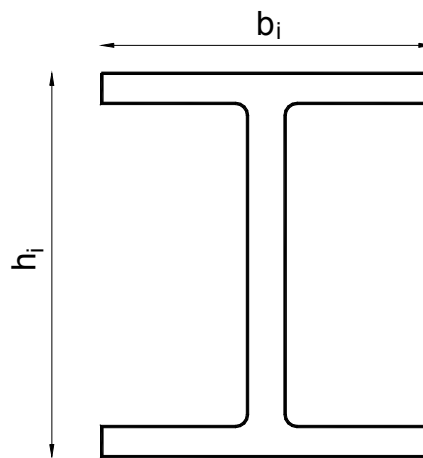
Η βελτιστοποίηση της κατασκευής πραγματοποιήθηκε με τις μεθόδους των Στρατηγικών Εξέλιξης πολλών μελών (M-ES). Στις επόμενες παραγράφους, θα αναφερθούμε αναλυτικά στις παραμέτρους του προβλήματος βελτιστοποίησης.

5.3.1 Μεταβλητές σχεδιασμού

Οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι στο σύνολό τους 10 και λαμβάνουν ακέραιες μόνο τιμές (διακριτός βέλτιστος σχεδιασμός). Οι δέκα αυτές μεταβλητές σχεδιασμού αναφέρονται στο ύψος h και στο πλάτος b του διπλού ταυ που αντιστοιχεί σε κάθε μία από τις 5 ομάδες χαρακτηριστικών των στοιχείων του φορέα. Στον πίνακα 5.1 που ακολουθεί, αναγράφονται τα όρια μέσα στα οποία επιτρέπεται να κινηθεί κάθε μεταβλητή σχεδιασμού.

Πίνακας 5.1. Μεταβλητές σχεδιασμού και επιτρεπόμενα όρια κίνησής τους

Μεταβλητή σχεδιασμού	Όρια
s_1 (Υψος h_1)	$5 \leq s_1 \leq 20$
s_2 (Πλάτος b_1)	$5 \leq s_2 \leq 20$
s_3 (Υψος h_2)	$5 \leq s_3 \leq 26$
s_4 (Πλάτος b_2)	$5 \leq s_4 \leq 22$
s_5 (Υψος h_3)	$5 \leq s_5 \leq 20$
s_6 (Πλάτος b_3)	$5 \leq s_6 \leq 20$
s_7 (Υψος h_4)	$5 \leq s_7 \leq 20$
s_8 (Πλάτος b_4)	$5 \leq s_8 \leq 20$
s_9 (Υψος h_5)	$5 \leq s_9 \leq 20$
s_{10} (Πλάτος b_5)	$5 \leq s_{10} \leq 20$



Σχήμα 5.3. Διατομή των στοιχείων (Διπλό ταυ)

Ο δείκτης i αναφέρεται στην ομάδα, $i=1 \rightarrow 5$

Το πάχος του πέλματος $t_{\pi,i}$ και το πάχος του κορμού $t_{κ,i}$ μπορούν να θεωρηθούν δευτερεύουσες μεταβλητές σχεδιασμού, καθώς εκφράζονται μέσω των κυρίων μεταβλητών σχεδιασμού h_i και b_i σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$t_{\pi,i} = 0.06 \cdot h_i + 0.10 \cdot (b_i - 10) \quad (5.1)$$

$$t_{\kappa,i} = 0.625 \cdot t_{\pi,i} \quad (5.2)$$

5.3.2 Αντικειμενική συνάρτηση

Η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος είναι, όπως συνηθίζεται στον βέλτιστο σχεδιασμό των κατασκευών, το βάρος του φορέα. Για την περίπτωση ενός χωρικού πλαισίου, το βάρος αυτό δίνεται από τη σχέση:

$$F_W = \sum_{i=1}^{n_g} \gamma_i A_i L_i \quad (5.3)$$

, όπου n_g είναι το πλήθος των διαφορετικών ομάδων στοιχείων, γ_i είναι το ειδικό βάρος του υλικού της ομάδας i , A_i είναι το εμβαδόν της διατομής των στοιχείων της ομάδας i και L_i είναι το άθροισμα των μηκών των μελών που ανήκουν στην ομάδα i . Επομένως, στην περίπτωση μας, θα είναι:

$$F_W = \gamma \cdot \sum_{i=1}^5 A_i L_i \quad (5.4)$$

, όπου $\gamma = 78.5 \text{ kN/m}^3$ ή 7.85 t/m^3 είναι το ειδικό βάρος του χάλυβα. Τα μήκη L_i δεν αλλάζουν από σχεδιασμό σε σχεδιασμό, αφού εξαρτώνται από τις συντεταγμένες των κόμβων του φορέα και όχι από τις διατομές του. Δεν ισχύει όμως το ίδιο και για τα εμβαδά A_i , τα οποία εκφράζονται συναρτήσει των μεταβλητών σχεδιασμού, προκειμένου να υπολογιστεί η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για κάθε σχεδιασμό.

5.3.3 Περιορισμοί

Οι περιορισμοί που τέθηκαν αφορούν τις τάσεις των μελών και τις σχετικές μετατοπίσεις μεταξύ των ορόφων. Οι συναρτήσεις περιορισμών των τάσεων

συμπεριλαμβάνουν και την επίδραση των ροπών και των τεμνουσών δυνάμεων οπότε για την περίπτωση διατομών τύπου διπλού ταυ (τύπου W σύμφωνα με τον κανονισμό AISC, 1989) οι συναρτήσεις περιορισμών τάσεων δίνονται ως αδιάστατοι συντελεστές q από τις σχέσεις:

$$q = \begin{cases} \frac{\sigma_a}{F_a} + \frac{\sigma_b}{F_b} \leq 1.0, & \text{αν } \frac{\sigma_a}{F_a} \leq 0.15 \\ \frac{\sigma_a}{F_a} + \frac{C_m \sigma_b}{(1 - \sigma_a / \sigma'_e) F_b} \leq 1.0, & \text{αν } \frac{\sigma_a}{F_a} > 0.15 \end{cases} \quad (5.5)$$

, όπου $\sigma_a = P_{\max}/A$ είναι η αξονική τάση, A είναι το εμβαδόν της διατομής της ομάδας μελών που εξετάζεται και $P_{\max}$ είναι η μέγιστη ασκούμενη αξονική δύναμη στην συγκεκριμένη ομάδα μελών. Κατά αντιστοιχία η καμπτική τάση δίνεται από τη σχέση $\sigma_b = M_{\max}/W$, όπου $M_{\max}$ είναι η μέγιστη καμπτική ροπή της συγκεκριμένης ομάδας μελών και W είναι η στατική ροπή αδράνειας, η οποία για διατομές τύπου διπλού ταυ του AISC, δίνεται συναρτήσει του εμβαδού της διατομής από τη σχέση $W = 0.256 \cdot A^{3/2}$. Με σ'_e συμβολίζεται η κατά Euler κρίσιμη τάση λυγισμού διαιρεμένη με ένα συντελεστή ασφαλείας C_m . Η επιτρεπόμενη εφελκυστική τάση δίνεται από τη σχέση $F_a = 0.60 \cdot \sigma_y$, ενώ η επιτρεπόμενη καμπτική τάση δίνεται από τη σχέση $F_b = 0.66 \cdot \sigma_y$, όπου $\sigma_y = 36 \text{ ksi (250 MPa)}$ είναι η τάση διαρροής των μελών.

Οι περιορισμοί στις μετατοπίσεις αφορούν την επιτρεπόμενη σχετική μετατόπιση μεταξύ των ορόφων, η οποία λαμβάνεται ως το 1.5 % του ύψους κάθε ορόφου.

5.4 Φάσμα σχεδιασμού

Το φάσμα απόκρισης είναι μια πολύ σημαντική έννοια για τον αντισεισμικό σχεδιασμό και χρησιμοποιείται κατά κόρον σήμερα από όλους σχεδόν τους αντισεισμικούς κανονισμούς. Αποτελεί μια περιγραφή σεισμικών φορτίων υπολογισμού και αποσκοπεί στην ελαχιστοποίηση της εξάρτησης του αντισεισμικού σχεδιασμού από τις ιδιαιτερότητες μίας συγκεκριμένης και μοναδικής εδαφικής κίνησης, η οποία είναι μαθηματικά βέβαιο πως δεν πρόκειται να επαναληφτεί η ίδια στο μέλλον. Οι ιδιαιτερότητες των διαφόρων σεισμικών

κινήσεων αντανακλώνται στην ακανόνιστη μορφή των φασμάτων απόκρισης με τις απότομες αυξομειώσεις των φασματικών τεταγμένων για μικρές μεταβολές της ιδιοπεριόδου, όπως επίσης και στις μεγάλες κατά κανόνα διαφορές μεταξύ διαφορετικών φασμάτων. Υπάρχουν όμως και ορισμένες γενικές ομοιότητες μεταξύ φασμάτων απόκρισης που οφείλονται σε κοινά χαρακτηριστικά σεισμικών κινήσεων. Πέραν τούτου, όλα τα φάσματα απόκρισης τείνουν στα ίδια μεγέθη στις οριακές περιπτώσεις πολύ υψηλών ή πολύ χαμηλών συχνοτήτων (ή αντίστοιχα πολύ δύσκαμπτων ή πολύ εύκαμπτων κατασκευών). Οι γενικές αυτές ομοιότητες κάνουν δυνατή την κατασκευή φασμάτων σχεδιασμού για μεγάλες κατηγορίες σεισμοτεκτονικών και εδαφικών συνθηκών.

Έγινε προσπάθεια, ώστε τα επιβαλλόμενα στην κατασκευή δυναμικά φορτία να ανταποκρίνονται κατά το δυνατόν στην ελληνική πραγματικότητα. Σύμφωνα με τον Ν.Ε.Α.Κ. (Παράρτημα Α), το ελαστικό φάσμα οριζοντίων σεισμικών κινήσεων του εδάφους έναντι περιόδων σε δευτερόλεπτα, δίνεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}
 R_e(t) &= A \cdot \gamma_1 \cdot \left[1 + (n \cdot \beta_0 - 1) \cdot \frac{T}{T_1} \right] & , \text{αν } 0 < T < T_1 \\
 R_e(t) &= A \cdot \gamma_1 \cdot n \cdot \beta_0 & , \text{αν } T_1 \leq T \leq T_2 \\
 R_e(t) &= A \cdot \gamma_1 \cdot n \cdot \beta_0 \cdot \left(\frac{T_2}{T} \right)^{2/3} & , \text{αν } T > T_2
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

, όπου:

$R_e(t)$	Η φασματική επιτάχυνση
T	Η περίοδος σε δευτερόλεπτα
T_1, T_2	Χαρακτηριστικές τιμές του φάσματος σε μια δευτερόλεπτα
A	Η σεισμική επιτάχυνση του εδάφους
γ_1	Ο συντελεστής σπουδαιότητας του δομήματος
$\beta_0 = 2.5$	Ο συντελεστής φασματικής ενίσχυσης
n	Διορθωτικός συντελεστής για απόσβεση διαφορετική από 5%,

$$\text{ο οποίος δίνεται από τη σχέση: } n = \sqrt{\frac{7}{2 + \zeta}} \geq 0.7$$

Οι παράμετροι T_1 , T_2 , A , γ_1 , ζ δίνονται από πίνακες του NEAK, ανάλογα με τη φύση της κατασκευής, την σπουδαιότητά της, το έδαφος θεμελίωσης, τη σεισμικότητα της περιοχής, κ.α. Για την περίπτωση μας, επιλέχθηκαν οι παρακάτω τιμές των παραμέτρων αυτών:

$$T_1 = 0.10 \text{ sec}$$

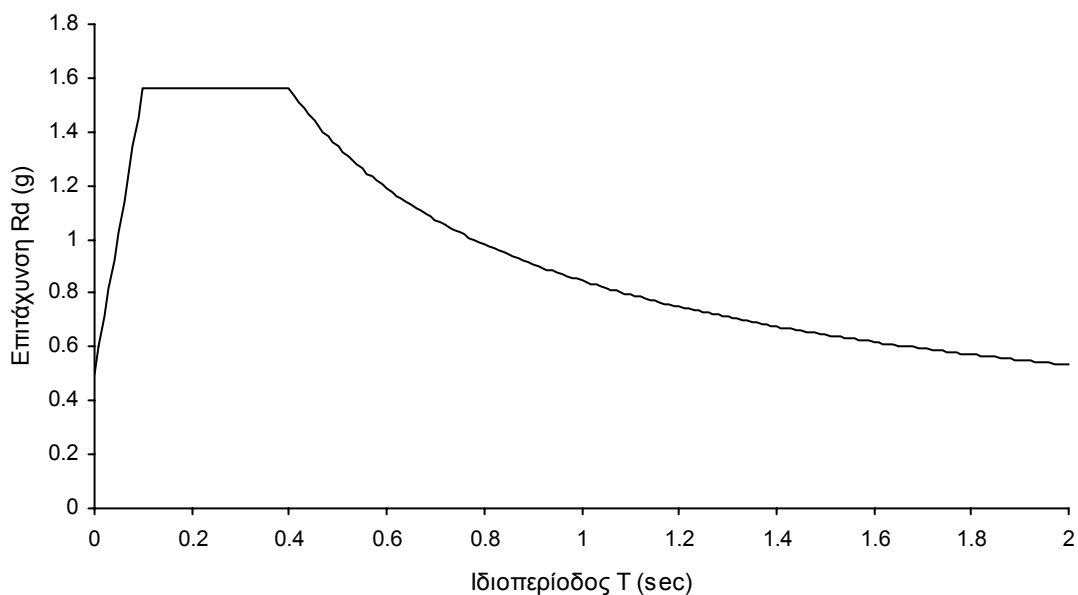
$$T_2 = 0.40 \text{ sec}$$

$$A = 0.50 \text{ g}$$

$$\gamma_1 = 1.00$$

$$\zeta = 2.5 \%$$

Για τις τιμές αυτές, σύμφωνα με τις σχέσεις (5.6), προκύπτει το ελαστικό φάσμα σχεδιασμού που χρησιμοποιήθηκε στις αναλύσεις, το οποίο παριστάνεται γραφικά στο σχήμα 5.4 που ακολουθεί.



Σχήμα 5.4. Το ελαστικό φάσμα σχεδιασμού στο οποίο βασίστηκαν οι δυναμικές αναλύσεις

Η σεισμική διέγερση που περιγράφεται από το παραπάνω φάσμα, θεωρήθηκε στις αναλύσεις που ακολουθούν ότι δρα κατά τη διεύθυνση x.

5.5 Μέθοδος της άμεσης ολοκλήρωσης

Η πρώτη σειρά των αναλύσεων έγινε με μεθόδους άμεσης ολοκλήρωσης. Σύμφωνα με τις μεθόδους αυτές, η δυναμική φόρτιση εκφράζεται μέσω ενός επιταχυνσιογραφήματος και η απόκριση της κατασκευής υπολογίζεται με βήμα προς βήμα ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων κίνησης. Στις αναλύσεις αυτές χρησιμοποιήθηκε συγκεκριμένα η μέθοδος Newmark, και προκειμένου να έχουμε άνευ όρων ευστάθεια, επιλέχτηκαν οι τιμές των παραμέτρων $\gamma = \frac{1}{2}$ και $\beta = \frac{1}{4}$, που αντιστοιχούν στη μέθοδο της μέσης επιταχύνσεως.

Σύμφωνα με τον ΝΕΑΚ (παρ. Α.4), οι δυναμικές αναλύσεις επιτρέπεται να γίνονται με μεθόδους άμεσης ολοκλήρωσης, με χρήση πραγματικών ή συνθετικών (τεχνητών) επιταχυνσιογραφημάτων σχεδιασμού, αρκεί να ικανοποιούνται οι παρακάτω απαιτήσεις:

- (i) Χρησιμοποιούνται τουλάχιστον πέντε διαφορετικά επιταχυνσιογραφήματα.
- (ii) Επιλέγονται ώστε να αντιπροσωπεύουν, κατά το δυνατόν, τις σεισμοτεκτονικές, γεωλογικές, εδαφοδυναμικές και εν γένει τοπικές συνθήκες της περιοχής του δομήματος.
- (iii) Είναι ψηφιοποιημένα ανά 0.02 sec, το μέγιστο.
- (iv) Έχουν διάρκεια σύμφωνη με τις σεισμοτεκτονικές, γεωλογικές, εδαφοδυναμικές και εν γένει τοπικές συνθήκες της τοποθεσίας του δομήματος, και οπωσδήποτε τουλάχιστον 15 δευτερόλεπτα.
- (v) Το μέσο φάσμα δηλαδή ο μέσος όρος των φασμάτων των επιταχυνσιογραφημάτων είναι ισοδύναμο με το φάσμα σχεδιασμού του κανονισμού (σχέσεις 5.6).

5.5.1 Παραγωγή τεχνητών επιταχυνσιογραφημάτων

Για να υπάρχει συνέπεια με τις απαιτήσεις του Νέου Ελληνικού Αντισεισμικού Κανονισμού, τα επιταχυνσιογραφήματα με τα οποία θα φορτιστεί δυναμικά η κατασκευή πρέπει να είναι τέτοια ώστε να ικανοποιούν τις απαιτήσεις της παραγράφου 5.5. Η πιο ουσιώδης και δύσκολα υλοποιήσιμη απαίτηση είναι φυσικά η πέμπτη, σύμφωνα με την οποία τα επιταχυνσιογραφήματα αυτά πρέπει να είναι συμβατά με το φάσμα απόκρισης του κανονισμού (σχέσεις 5.6).

Γνωρίζουμε ότι σε ένα επιταχυνσιογράφημα αντιστοιχεί ένα μοναδικό φάσμα απόκρισης, το οποίο μάλιστα μπορεί να ευρεθεί σχετικά εύκολα με διαδοχικές συμβατικές δυναμικές αναλύσεις ενός μονοβαθμίου συστήματος για διάφορες τιμές της ιδιοπεριόδου. Αντίθετα, σε ένα φάσμα απόκρισης αντιστοιχούν άπειρα το πλήθος επιταχυνσιογραφήματα, τα οποία μπορεί να διαφέρουν μεταξύ τους από λίγο έως πολύ. Η παραγωγή επιταχυνσιογραφημάτων τα οποία να αντιστοιχούν σε ένα δεδομένο φάσμα σχεδιασμού είναι ένα ιδιαίτερα δύσκολο θέμα, για την αντιμετώπιση του οποίου έχουν κατά καιρούς προταθεί και εφαρμοστεί διάφορες τεχνικές. Γενικά, το φάσμα των προκύπτοντων από τέτοιες διαδικασίες επιταχυνσιογραφημάτων πλησιάζει μεν το ζητούμενο φάσμα απόκρισης, σε καμία περίπτωση όμως δεν ταυτίζεται πλήρως με αυτό.

Στην περίπτωση μας, για την παραγωγή τεχνητών επιταχυνσιογραφημάτων συμβατών με το φάσμα απόκρισης του κανονισμού, χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή EQSIM, το οποίο ευγενικά μας παραχώρησε ο κύριος Χάρης Μουζάκης. Πρόκειται για ένα πρόγραμμα του τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του πανεπιστημίου του Bristol, γραμμένο σε Fortran 77, το οποίο χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο των D. Gasparini και E. Vanmarke του πανεπιστημίου του MIT (1976) και αποτελεί βελτιωμένη έκδοση του αρχικού προγράμματος SIMQKE των δύο αυτών ερευνητών.

Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιεί το πρόγραμμα EQSIM για την παραγωγή των τεχνητών επιταχυνσιογραφημάτων είναι επαναληπτικός και βασίζεται στο ότι κάθε περιοδική συνάρτηση μπορεί να αναλυθεί σε μία σειρά ημιτόνων, σύμφωνα με τη σχέση:

$$X(t) = \sum_{i=1}^n A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad (5.7)$$

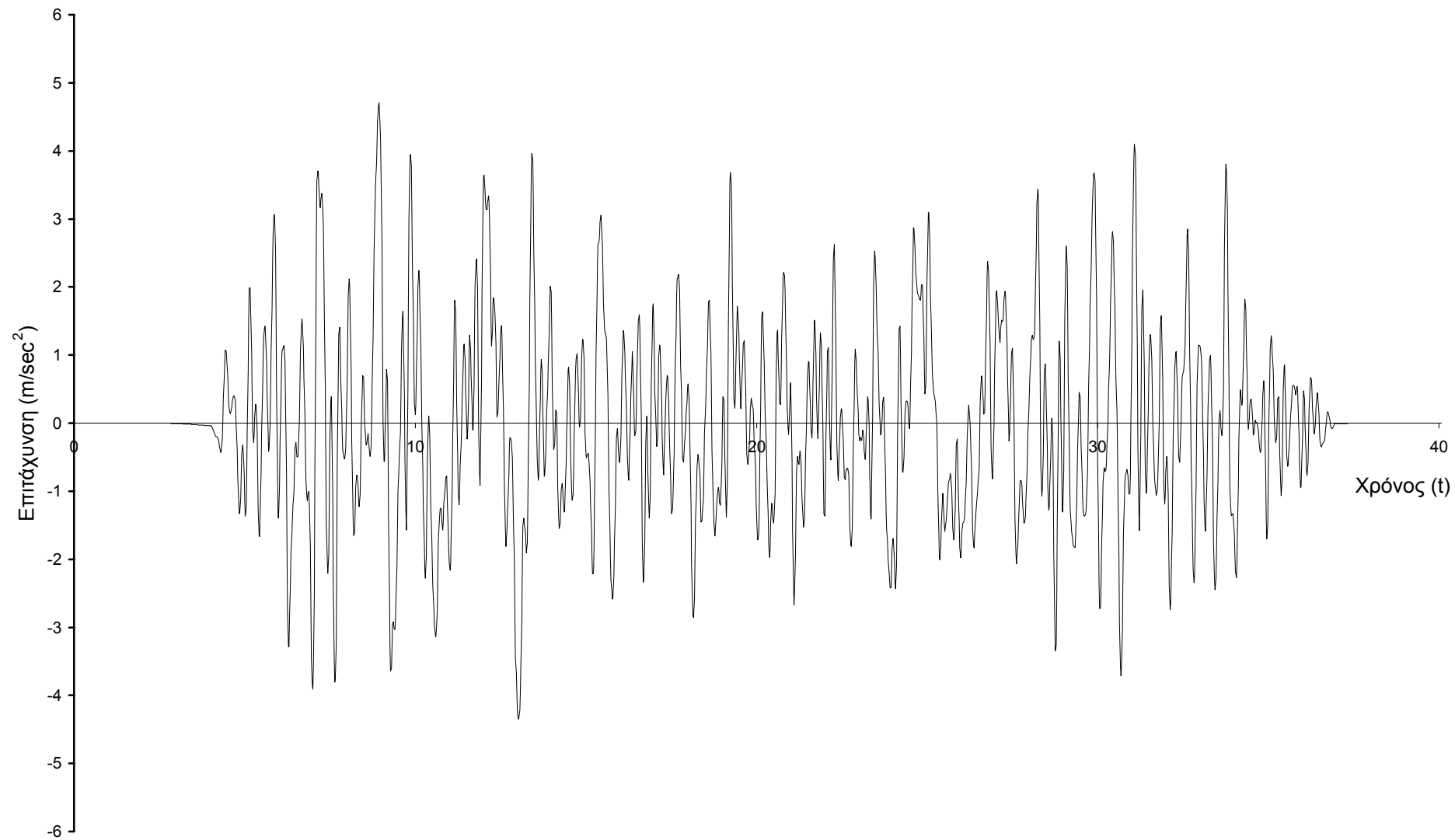
, όπου A_i είναι το πλάτος, ω_i είναι η κυκλική συχνότητα και φ_i είναι η γωνία φάσης του i -οστού συνεισφέροντος ημιτόνου. Έχοντας ένα σταθερό διάνυσμα πλατών, υποθέτοντας ότι οι συχνότητες ω_i διαφέρουν μεταξύ τους κατά μία σταθερή ποσότητα $\Delta\omega_i$ και παράγοντας διαφορετικά μεταξύ τους διανύσματα από γωνίες φάσης, λαμβάνουμε διαφορετικές κινήσεις οι οποίες είναι όμοιες σε γενική εμφάνιση (δηλ. σε περιεχόμενο συχνοτήτων), διαφέρουν όμως στις “λεπτομέρειες”. Τα διανύσματα των γωνιών φάσης παράγονται με χρήση μίας γεννήτριας τυχαίων αριθμών, με ομοιόμορφη πιθανότητα στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Οι παραγόμενες από την επαναληπτική αυτή διαδικασία τυχαίες κινήσεις φιλτράρονται εν τέλει κατάλληλα ώστε να εξασφαλιστεί μηδενική τελική εδαφική ταχύτητα. Περισσότερες

πληροφορίες για τον αλγόριθμο και το μαθηματικό υπόβαθρο πάνω στο οποίο είναι κτισμένος, μπορούν να βρεθούν στις βιβλιογραφικές παραπομπές 19, 20, 26.

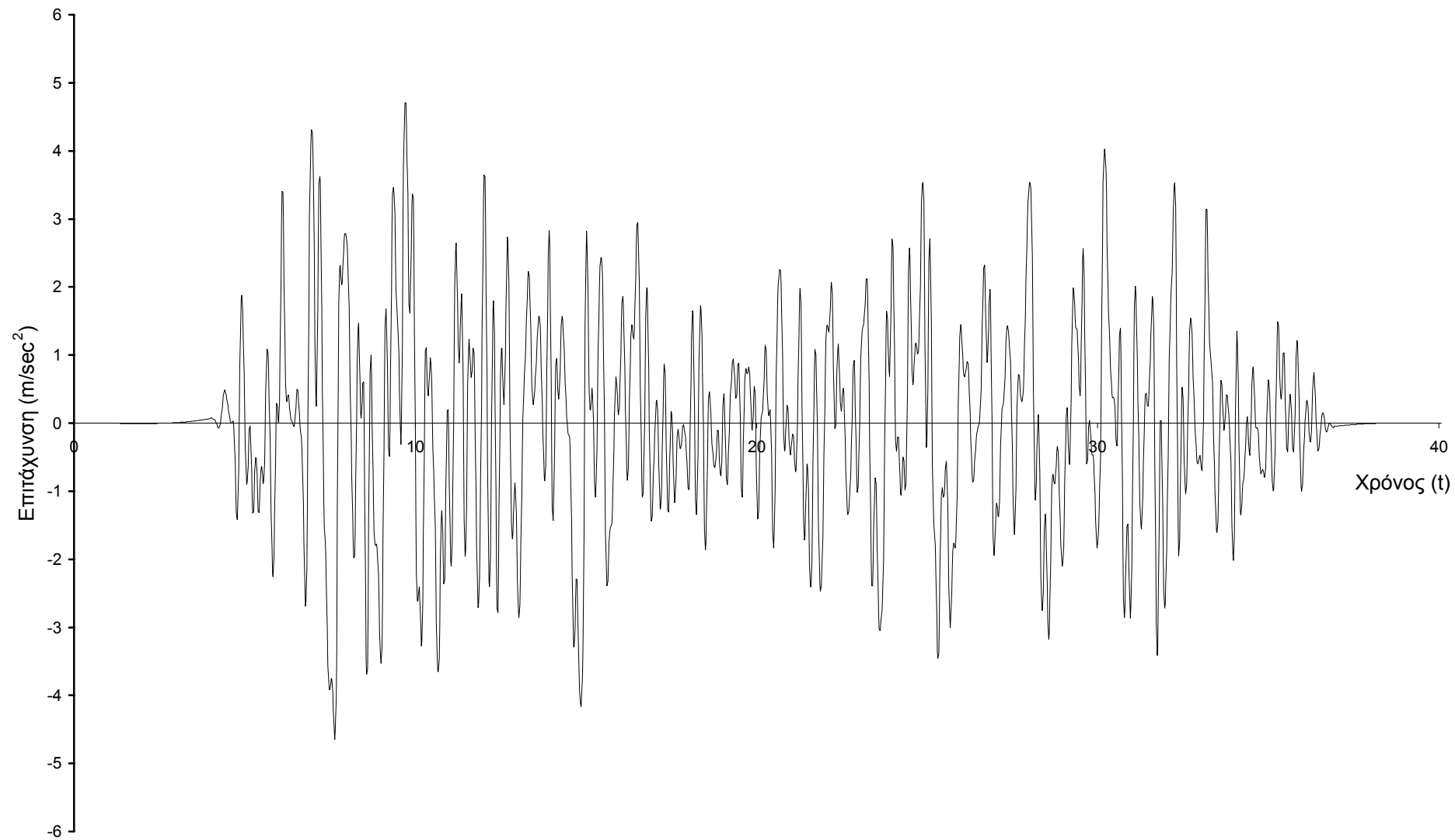
Ως δεδομένα για το πρόγραμμα EQSIM δίνονται το φάσμα σχεδιασμού, το είδος του (φάσμα μετατοπίσεων, ταχυτήτων ή επιταχύνσεων) καθώς και κάποιες άλλες παράμετροι, οι οποίες έχουν να κάνουν με τη συνολική διάρκεια των παραγόμενων επιταχυνσιογραφημάτων, το πλήθος των σημείων με τα οποία επιθυμούμε να οριστούν αυτά, την περιβάλλουσα της έντασης των επιταχυνσιογραφημάτων σε σχέση με τον χρόνο (Intensity envelope), κ.α. Όσον αφορά το τελευταίο, το πρόγραμμα μας δίνει τη δυνατότητα επιλογής μεταξύ τριών κατανομών της έντασης, της τραπεζοειδούς (Trapezoidal), της εκθετικής (exponential) και της σύνθετης (compound) κατανομής.

Χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα EQSIM παράγαμε μία σειρά από τεχνητά επιταχυνσιογραφήματα, στατιστικώς ανεξάρτητα μεταξύ τους, κάθε ένα από τα οποία αναφέρεται στο φάσμα σχεδιασμού του σχήματος 5.4. Επιλέχτηκε η τραπεζοειδής κατανομή της έντασης και έγινε μία ψηφιοποίηση με 2048 σημεία, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 0.02 sec, σύμφωνα με τον κανονισμό, και επομένως η διάρκεια κάθε επιταχυνσιογραφήματος είναι γύρω στα 40 sec. Από τη σειρά αυτή, επιλέχτηκαν τελικά τρία επιταχυνσιογραφήματα, τα οποία χρησιμοποιήθηκαν για τις δυναμικές αναλύσεις και τον σχεδιασμό. Η επιλογή έγινε κατά τέτοιο τρόπο, ώστε τα τρία αυτά επιταχυνσιογραφήματα να διαφέρουν μεταξύ τους σε μορφή και σε περιεχόμενο συχνοτήτων, και να εξασφαλίζουν έτσι “γενική” καταπόνηση του φορέα.

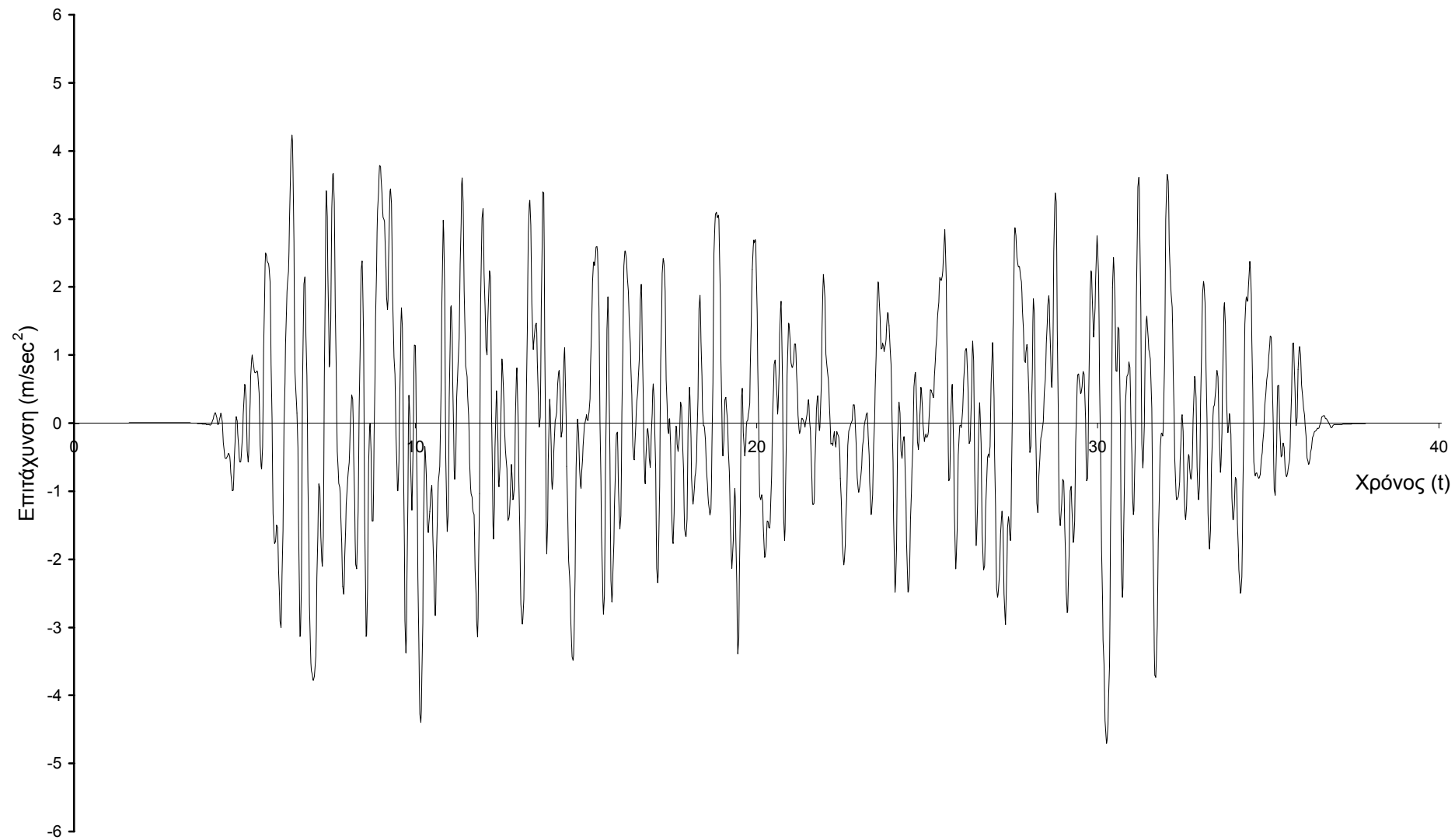
Η χρονοϊστορία των τριών αυτών δυναμικών φορτίσεων παρουσιάζεται σε μορφή διαγραμμάτων $\ddot{u}_g = f(t)$ στα σχήματα 5.5, 5.6 και 5.7 που ακολουθούν. Μπορεί να παρατηρήσει κανείς, ως μία πρώτη ένδειξη της ορθότητας του αποτελέσματος, δηλαδή του συμβιβαστού μεταξύ των παραγόμενων επιταχυνσιογραφημάτων με το φάσμα σχεδιασμού του σχήματος 5.4, ότι η μέγιστη εδαφική επιτάχυνση (peak ground acceleration) σε κάθε ένα από τα τρία επιταχυνσιογραφήματα, είναι περίπου 0.5 g ($\cong 5 \text{ m/sec}^2$), τιμή ίδια με αυτήν του φάσματος σχεδιασμού για $T=0$. Πράγματι, μία απείρως δύσκαμπτη κατασκευή ($T=0$) δεν έχει ελαστικότητα, κινείται επομένως “μαζί” με το έδαφος, και κατά συνέπεια η μέγιστη επιτάχυνση της κατασκευής αυτής θα είναι ίση με τη μέγιστη εδαφική επιτάχυνση $\ddot{u}_g^{(\max)}$.



Σχήμα 5.5. Επιταχυνσιογράφημα σχεδιασμού Νο 1



Σχήμα 5.6. Επιταχυνσιογράφημα σχεδιασμού Νο 2



Σχήμα 5.7. Επιταχυνσιογράφημα σχεδιασμού Νο 3

5.6 Μέθοδος των ιδιομορφών

Η δεύτερη σειρά των δυναμικών αναλύσεων έγινε με τη μέθοδο των ιδιομορφών. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, το πολυβάθμιο σύστημα των N βαθμών ελευθερίας ανάγεται σε N μονοβάθμια συστήματα τα οποία μπορούν να αντιμετωπιστούν ξεχωριστά, ως μεμονωμένα συστήματα. Η ολική απόκριση της κατασκευής, μπορεί να προκύψει με απλή άθροιση των επιμέρους αποκρίσεων σε συνάρτηση με το χρόνο, όπως περιγράφηκε αναλυτικά στο τρίτο κεφάλαιο. Αυτό προϋποθέτει τη γνώση της πλήρους χρονικής μεταβολής των επιμέρους αποκρίσεων, και επομένως την αναλυτική επίλυση κάθε επιμέρους εξίσωσης κίνησης.

Στον αντισεισμικό σχεδιασμό όμως, ο οποίος ενέχει ούτως ή άλλως μεγάλες αβεβαιότητες όσον αφορά την ίδια τη σεισμική διέγερση, η χρησιμότητα της πλήρους χρονικής μεταβολής της απόκρισης της κατασκευής έχει πρακτικά περιορισμένη σημασία. Κατά κανόνα, για έναν καλό σχεδιασμό αρκεί η γνώση των μεγίστων των μετατοπίσεων και των εντατικών μεγεθών. Η εύρεση του ακριβούς μεγίστου της ολικής απόκρισης, απαιτεί φυσικά και πάλι τη γνώση της χρονικής μεταβολής όλων των επιμέρους N λύσεων των εξισώσεων κίνησης, εφόσον τα μέγιστα αυτών δεν συμπίπτουν χρονικά ώστε να μπορούν απλά να αθροιστούν. Είναι όμως δυνατό, το ολικό μέγιστο να προσεγγιστεί με ικανοποιητική ακρίβεια, εκφραζόμενο ως συνάρτηση μόνο των επιμέρους μεγίστων των ιδιομορφικών συνιστωσών. Η πιο γνωστή και καθιερωμένη προσέγγιση, η οποία προκύπτει από τη θεώρηση του σεισμού ως τυχαίας διέγερσης, είναι η μέθοδος της πλήρους τετραγωνικής επαλληλίας, σύμφωνα με την οποία, η τιμή της ολικής μέγιστης απόκρισης προκύπτει ως η τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των επιμέρους μεγίστων αποκρίσεων λόγω κάθε ιδιομορφής:

$$u_{\max} = \sqrt{u_{1,\max}^2 + u_{2,\max}^2 + \dots + u_{N,\max}^2} \quad (5.8)$$

Έχει διαπιστωθεί ότι το σφάλμα που υπεισέρχεται στην παραπάνω θεώρηση είναι σχετικά μικρό και σίγουρα αποδεκτό για τον αντισεισμικό σχεδιασμό. Αν οι ιδιομορφές του φορέα έχουν παραπλήσιες ιδιοσυχνότητες, πράγμα που σπάνια συμβαίνει σε κοινά κτίρια, τότε το σφάλμα αυτό ενδέχεται να είναι σημαντικό, οπότε χρησιμοποιούνται πιο πολύπλοκες εκφράσεις για την επαλληλία. Η εφαρμογή της εξίσωσης (5.8) επιτρέπει τον δυναμικό

αντισεισμικό υπολογισμό με γνώση μόνο των μεγίστων των ιδιομορφικών συνιστωσών $u_{i,max}$, τα οποία μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις των φασματικών τεταγμένων για κάθε τιμή της ιδιοπεριόδου T . Η απλοποιητική αυτή θεώρηση εφαρμόζεται στους περισσότερους αντισεισμικούς κανονισμούς, συμπεριλαμβανομένου του Ν.Ε.Α.Κ. Παρακάτω, θα δούμε συνοπτικά πώς εφαρμόζεται η μέθοδος των ιδιομορφών, όπως την περιγράφει ο Ν.Ε.Α.Κ.:

(i) Υπολογίζονται οι ιδιοσυχνότητες ω_i και τα ιδιοδιανύσματα Φ_i . Ταξινομούνται στη συνέχεια, έτσι ώστε οι ιδιοσυχνότητες να είναι σε φθίνουσα σειρά ($\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_N$)

(ii) Υπολογίζονται οι γενικευμένες μάζες, σύμφωνα με τη σχέση:

$$M_i = \{\Phi_i\}^T [m] \{\Phi_i\} \quad (5.9)$$

(iii) Υπολογίζονται τα μεγέθη L_i , σύμφωνα με τη σχέση:

$$L_i = \{\Phi_i\}^T [m] \{r\} \quad (5.10)$$

, όπου $\{r\}$ είναι το διάνυσμα στατικής επιρροής το οποίο “συνδέει” τον εκάστοτε σεισμό με τους αντίστοιχους βαθμούς ελευθερίας της κατασκευής.

(iv) Υπολογίζονται οι συντελεστές συμμετοχής Γ_i , σύμφωνα με τη σχέση:

$$\Gamma_i = \frac{L_i}{M_i} \quad (5.11)$$

(v) Υπολογίζονται οι δρώσες μάζες, σύμφωνα με τη σχέση:

$$M_{eff,i} = \frac{L_i^2}{M_i} \quad (5.12)$$

(vi) Υπολογίζεται ο αριθμός των σημαντικών ιδιομορφών. Σύμφωνα με τον ΝΕΑΚ (παρ. 3.3.2.(1)), ο ελάχιστος αριθμός των ιδιομορφών που λαμβάνονται υπόψη καθορίζεται έτσι ώστε το άθροισμα των δρωσών ιδιομορφικών μαζών να μην υπολείπεται από το 90%

της ταλαντούμενης μάζας του συστήματος. Επομένως, για να είναι οι n πρώτες ιδιομορφές αρκετές, πρέπει και αρκεί:

$$\sum_{i=1}^n M_{\text{eff},i} \geq 0.90 \sum_{i=1}^N M_{\text{eff},i} \quad (5.13)$$

(vii) Υπολογίζονται οι σεισμικές δράσεις σχεδιασμού από το φάσμα σχεδιασμού των σχέσεων (5.6), δηλαδή οι τιμές των επιταχύνσεων $R_d(T_i)$ που αντιστοιχούν σε κάθε μία από τις ιδιοπεριόδους T_i των σημαντικών μορφών.

(viii) Υπολογίζονται οι φασματικές μετακινήσεις σχεδιασμού, σύμφωνα με τη σχέση:

$$(SD)_i = \frac{R_d(T_i)}{\omega_i^2} = \frac{R_d(T_i) \cdot T_i^2}{4\pi^2} \quad (5.14)$$

(ix) Υπολογίζονται οι ιδιομετακινήσεις σχεδιασμού, σύμφωνα με τη σχέση:

$$\{u_i\} = \Gamma_i \cdot \{\Phi_i\} \cdot (SD)_i \quad (5.15)$$

(x) Οι τελικές μετακινήσεις υπολογίζονται με επαλληλία των επιμέρους μετακινήσεων, με τη μέθοδο της πλήρους τετραγωνικής επαλληλίας (SRSS), σύμφωνα με την οποία η τιμή του τελικού μεγέθους δίνεται ως η τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των επιμέρους μεγεθών.

(xi) Τα εντατικά μεγέθη προκύπτουν επίσης με επαλληλία των επιμέρους εντατικών μεγεθών, τα οποία σε κάθε περίπτωση εκφράζονται συναρτήσει των ιδιομετακινήσεων σύμφωνα με μία σχέση της μορφής:

$$\{F\} = [k] \cdot \{u\} \quad (5.16)$$

, όπου το μητρώο δυσκαμψίας $[k]$ και το διάνυσμα των μετακινήσεων $\{u\}$, αναφέρονται στο εξεταζόμενο μέλος της κατασκευής. Πρέπει να τονιστεί εδώ πως η σωστή εφαρμογή της μεθόδου απαιτεί για οποιοδήποτε μέγεθος (μετακίνηση, σχετική μετακίνηση ή εντατικό

μέγεθος), πρώτα τον υπολογισμό των ιδιομορφικών του συνιστωσών και έπειτα εφαρμογή της σχέσης επαλληλίας (5.8).

Όπως προειπώθηκε, η μέθοδος των ιδιομορφών μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε γραμμικά συστήματα. Στην πράξη όμως, σε μία έντονη σεισμική διέγερση, κάποια μέλη της κατασκευής θα υποστούν διαρροή και εφόσον το σύστημα διαθέτει κάποια πλαστιμότητα, η συμπεριφορά του θα είναι ελαστοπλαστική. Λόγω της ανελαστικής συμπεριφοράς, θα επέλθει μείωση των σεισμικών φορτίων, σε σχέση με εκείνα που προκύπτουν υπολογιστικά για ένα απεριόριστα ελαστικό σύστημα. Για να ληφθούν υπόψη προσεγγιστικά τα φαινόμενα αυτά, χωρίς να απαιτηθεί μη γραμμική ανάλυση, υπεισέρχεται στον κανονισμό ο παράγοντας q , ο οποίος ονομάζεται *συντελεστής σεισμικής συμπεριφοράς*, εξαρτάται από το υλικό και το είδος του φορέα και εκφράζει την πλαστιμότητα του συστήματος. Στις περιπτώσεις αυτές, για την ανάλυση και τον σχεδιασμό, χρησιμοποιείται το ανελαστικό φάσμα σχεδιασμού του κανονισμού.

Περисσότερα στοιχεία για την αναλυτική εφαρμογή της μεθόδου των ιδιομορφών, σύμφωνα με τον Ν.Ε.Α.Κ. και τον συντελεστή σεισμικής συμπεριφοράς q , μπορούν να βρεθούν στις βιβλιογραφικές παραπομπές 1, 8, 9. Στην περίπτωση μας, προκειμένου τα αποτελέσματα των αναλύσεων με τη μέθοδο των ιδιομορφών να είναι συμβατά με εκείνα της μεθόδου άμεσης ολοκλήρωσης στην οποία υποτέθηκε αμιγώς γραμμική συμπεριφορά της κατασκευής, τέθηκε $q=1$, δηλαδή δεν λάβαμε υπόψη την επίδραση του συντελεστή σεισμικής συμπεριφοράς.

5.7 Αποτελέσματα των αναλύσεων

Στόχος των αναλύσεων βελτιστοποίησης που πραγματοποιήθηκαν στα πλαίσια της διπλωματικής αυτής εργασίας, όπως προειπώθηκε, δεν ήταν η εύρεση του βέλτιστου σχεδιασμού αυτή καθ' αυτή, αλλά η διερεύνηση του αντικειμένου σε βάθος, η σύγκριση των μεθόδων που εφαρμόστηκαν και τελικά η εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων πάνω στα θέματα αυτά. Για τον σκοπό αυτόν, πραγματοποιήθηκε ένα μεγάλο πλήθος αναλύσεων ώστε να διαπιστωθεί πώς οι διάφορες παράμετροι του προβλήματος επηρεάζουν την πορεία της διαδικασίας βελτιστοποίησης. Για κάθε μία από τις αναλύσεις βελτιστοποίησης, οι δυναμικές επιλύσεις οι απαραίτητες για τον έλεγχο των περιορισμών του προβλήματος έγιναν με τις δύο μεθόδους που περιγράφηκαν σε προηγούμενες παραγράφους, οπότε

είχαμε και την ευκαιρία να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των δύο αυτών μεθόδων, σε επίπεδο βελτιστοποίησης, δηλαδή σε επίπεδο βάρους της κατασκευής.

Για τις αναλύσεις, χρησιμοποιήθηκε το υπολογιστικό σύστημα Ερμής (Hermes), που αποτελεί τμήμα του κεντρικού υπολογιστή του ΕΜΠ, καθώς το αυξημένο υπολογιστικό κόστος του προβλήματος, έκανε πρακτικά αδύνατη τη χρησιμοποίηση ενός συμβατικού προσωπικού ηλεκτρονικού υπολογιστή (PC). Ο Ερμής, αντίθετα με τα κοινά PCs, μας παρείχε αφενός την ευκολία να τρέχουμε πολλές διαφορετικές αναλύσεις ταυτόχρονα, με μόνο περιορισμό τη χωρητικότητα του σκληρού δίσκου, και αφετέρου τη δυνατότητα λειτουργίας στο “background”, δηλαδή χωρίς να απαιτείται συνεχής εποπτεία. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε ότι μία τυπική επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης απαιτούσε γύρω στις 4 με 8 ώρες συνεχούς λειτουργίας του ηλεκτρονικού υπολογιστή.

5.7.1 Διερεύνηση των κριτηρίων τερματισμού

Η έρευνα ξεκίνησε με την αναζήτηση του καλύτερου κριτηρίου τερματισμού για τις μεθόδους των Στρατηγικών Εξέλιξης. Ένα κριτήριο τερματισμού θεωρείται γενικά “καλό”, όταν οδηγεί στο καθολικό ελάχιστο ή σε περιοχή κοντά σε αυτό, μέσα σε εύλογο υπολογιστικό χρονικό διάστημα. Για την έρευνα αυτή, χρησιμοποιήθηκε το σχήμα (5+5)ES, δηλαδή ένα σχήμα των ES με 5 γονείς και 5 απογόνους σε κάθε γενιά. Ως σημεία εκκίνησης της αναζήτησης επελέγησαν οι δυσμενέστερες τιμές του εφικτού πεδίου τιμών, για τις οποίες το βάρος της κατασκευής είναι 428.19, ενώ ο τελεστής μετάλλαξης επελέγη να δρα σε 4 από τις 10 μεταβλητές σχεδιασμού. Σύμφωνα με τα κριτήρια τερματισμού που τίθενται σε ένα πρόβλημα διακριτού βέλτιστου σχεδιασμού, η επαναληπτική διαδικασία τερματίζεται όταν:

(i) Η εντοπιζόμενη καλύτερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης δεν έχει βελτιωθεί για τις τελευταίες K_I γενιές.

(ii) Η μέση τιμή των αντικειμενικών συναρτήσεων όλων των γονέων βελτιώθηκε στις τελευταίες K_{II} γενιές κατά ποσοστό μικρότερο μιας δεδομένης τιμής ε_b .

(iii) Η σχετική διαφορά μεταξύ της καλύτερης και της μέσης τιμής των αντικειμενικών συναρτήσεων όλων των γονέων στην τρέχουσα γενιά είναι μικρότερη μίας δεδομένης τιμής ε_c .

(iv) Ο λόγος μ_b/μ έχει φτάσει την τιμή ε_d , όπου μ_b είναι το πλήθος των γονέων στην τρέχουσα γενιά με τιμή ίση της καλύτερης που έχει επιτευχθεί.

Οι τιμές των παραμέτρων που επιλέχθηκαν, είναι: $K_I = 6$, $K_{II} = 3$, $\varepsilon_b = 0$, $\varepsilon_c = 10^{-4}$ και $\varepsilon_d = 0.8$. Τα αποτελέσματα της διερεύνησης αυτής παρουσιάζονται συνοπτικά στους πίνακες 5.1α και 5.1β που ακολουθούν, κάθε ένας από τους οποίους αναφέρεται σε μία από τις δύο μεθόδους επίλυσης του δυναμικού προβλήματος.

A. Μέθοδος άμεσης ολοκλήρωσης

Πίνακας 5.1α Συμπεριφορά των ES για διάφορα κριτήρια τερματισμού (M.A.O.).

Κριτήριο τερματισμού	Βέλτιστη λύση (βάρος)	Χρόνος (sec)	Χρόνος (h, min)	Γενιές	Αναλύσεις Π. Σ.					
i	162.57	13818.90	3h, 50min	40	142					
ii	141.65	20598.56	5h, 43min	105	348					
iii	139.71	26347.68	7h, 19min	185	604					
iv	139.71	25587.68	7h, 6min	162	533					
Κριτήριο τερματισμού	Βέλτιστη λύση (μεταβλητές σχεδιασμού)									
	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄	s ₅	s ₆	s ₇	s ₈	s ₉	s ₁₀
i	18	15	23	18	20	14	8	6	18	13
ii	20	14	23	12	20	14	7	5	14	12
iii	20	14	25	11	20	14	5	5	15	11
iv	20	14	25	11	20	14	5	5	15	11

B. Μέθοδος των ιδιομορφών

Πίνακας 5.1β Συμπεριφορά των ES για διάφορα κριτήρια τερματισμού (M.I.).

Κριτήριο τερματισμού	Βέλτιστη λύση (βάρος)	Χρόνος (sec)	Χρόνος (h, min)	Γενιές	Αναλύσεις					
i	193.90	5674.25	1h, 35min	40	157					
ii	171.44	12893.73	3h, 35min	97	352					
iii	168.75	41100	11h, 25min	335	1170					
iv	168.75	43398.85	12h, 3min	373	1231					
Κριτήριο τερματισμού	Βέλτιστη λύση (μεταβλητές σχεδιασμού)									
	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄	s ₅	s ₆	s ₇	s ₈	s ₉	s ₁₀
i	20	16	21	21	20	16	11	8	14	13
ii	20	15	21	16	20	15	8	10	13	13
iii	20	15	20	15	20	15	8	10	13	13
iv	20	15	20	15	20	15	8	10	13	13

Σχόλια - Συμπεράσματα

Στην πρώτη περίπτωση (μέθοδος άμεσης ολοκλήρωσης), τα διάφορα κριτήρια τερματισμού μας οδήγησαν σε μείωση του βάρους της τάξης του 62-67% σε σχέση με το αρχικό βάρος, ενώ στη δεύτερη περίπτωση (μέθοδος των ιδιομορφών), τα κριτήρια αυτά οδήγησαν σε μείωση του βάρους της τάξης του 55-60%. Παρατηρούμε ότι την καλύτερη (ελάχιστη) τιμή του βάρους, μας την έδωσαν και στις δύο περιπτώσεις τα κριτήρια τερματισμού iii και iv, με το αντίστοιχο τίμημα όμως, όσον αφορά τον συνολικό χρόνο επίλυσης, ο οποίος και για τα δύο αυτά κριτήρια είναι ιδιαίτερα αυξημένος. Τα κριτήρια αυτά, για τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων ε_c και ε_d , φαίνεται πως δυσκολεύονται ιδιαίτερα να οδηγήσουν σε σύγκλιση, και είναι επομένως πρακτικά “ασύμφορα”.

Το κριτήριο ii δείχνει να έχει πολύ καλή συμπεριφορά, αφού αφενός καταφέρνει να προσεγγίσει με ικανοποιητική ακρίβεια το “βέλτιστο” αποτέλεσμα των κριτηρίων iii και iv, και αφετέρου ο χρόνος που απαιτεί είναι σαφώς μικρότερος από αυτόν των δύο άλλων κριτηρίων. Το κριτήριο i, δείχνει να είναι το πιο “γρήγορο”, εφόσον οδηγεί σε σύγκλιση σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα, σχετικά με τα άλλα κριτήρια, δεν καταφέρνει όμως να ξεφύγει από ένα τοπικό ελάχιστο, το οποίο πάντως δεν απέχει πάρα πολύ από τη “βέλτιστη” λύση.

Από τα παραπάνω γίνεται σαφές ότι όσο πιο κοντά θέλει να φτάσει κανείς στο καθολικό βέλτιστο, τόσο περισσότερο θα του κοστίσει γενικά αυτό, όσον αφορά τον συνολικό χρόνο επίλυσης. Υπάρχουν περιπτώσεις στην πράξη, κυρίως σε μεγάλα έργα, στις οποίες ο χρόνος επίλυσης μπορεί να αποδειχτεί πρωτεύουσας σημασίας παράγοντας, μεταφραζόμενος σε πραγματικό κόστος του έργου. Θα πρέπει επομένως κανείς να συμβιβάσει τις δύο αυτές αντιφατικές απαιτήσεις, προκειμένου να πάρει το ζητούμενο σε κάθε περίπτωση αποτέλεσμα.

5.7.2 Διερεύνηση των σχημάτων $(\mu+\lambda)$ ES και (μ, λ) ES

Στην παράγραφο αυτή, εξετάζεται η συμπεριφορά των σχημάτων $(\mu+\lambda)$ ES και (μ, λ) ES, για τις δύο χρησιμοποιηθείσες μεθόδους επίλυσης. Για την έρευνα αυτή, χρησιμοποιήθηκαν τα σχήματα με 5 γονείς και 5 απογόνους σε κάθε γενιά (δηλαδή $\mu=\lambda=5$). Ως σημεία εκκίνησης της αναζήτησης επελέγησαν οι δυσμενέστερες τιμές του εφικτού

πεδίου τιμών για τις οποίες το βάρος της κατασκευής είναι 428.19, ενώ ο τελεστής μετάλλαξης επελέγη να δρα σε 4 από τις 10 μεταβλητές σχεδιασμού. Το κριτήριο τερματισμού της διαδικασίας είναι το κριτήριο i το οποίο επέδειξε ικανοποιητική συμπεριφορά σε σχέση με τα άλλα κριτήρια και ταχύτερη σύγκλιση, σύμφωνα με τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου. Τα αποτελέσματα της διερεύνησης αυτής παρουσιάζονται συνοπτικά στους πίνακες 5.2α και 5.2β που ακολουθούν, κάθε ένας από τους οποίους αναφέρεται σε μία από τις δύο μεθόδους επίλυσης του δυναμικού προβλήματος.

A. Μέθοδος άμεσης ολοκλήρωσης

Πίνακας 5.2α Συμπεριφορά των σχημάτων $(\mu+\lambda)$ ES και (μ, λ) ES, κριτήριο i (M.A.O.).

Σχήμα ES	Βέλτιστη λύση (βάρος)	Χρόνος (sec)		Χρόνος (h, min)		Γενιές		Αναλύσεις Π. Σ.		
(μ+λ)	162.57	13818.90		3h, 50min		40		142		
(μ, λ)	145.02	39657.64		11h, 1min		40		359		
Σχήμα ES	Βέλτιστη λύση (μεταβλητές σχεδιασμού)									
	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄	s ₅	s ₆	s ₇	s ₈	s ₉	s ₁₀
(μ+λ)	18	15	23	18	20	14	8	6	18	13
(μ, λ)	20	14	18	17	20	14	12	5	20	8

B. Μέθοδος των ιδιομορφών

Πίνακας 5.2β Συμπεριφορά των σχημάτων $(\mu+\lambda)$ ES και (μ, λ) ES (M.I.).

Σχήμα ES	Βέλτιστη λύση (βάρος)	Χρόνος (sec)		Χρόνος (h, min)		Γενιές	Αναλύσεις Π. Σ.			
(μ+λ)	193.90	5674.25		1h, 35min		40	157			
(μ, λ)	226.63	5284.49		1h, 28min		21	140			
Σχήμα ES	Βέλτιστη λύση (μεταβλητές σχεδιασμού)									
	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄	s ₅	s ₆	s ₇	s ₈	s ₉	s ₁₀
(μ+λ)	20	16	21	21	20	16	11	8	14	13
(μ, λ)	17	17	26	22	20	18	13	9	16	14

Σχόλια - Συμπεράσματα

Η συμπεριφορά του σχήματος $(\mu, \lambda)ES$ είναι διαφορετική για τις δύο περιπτώσεις των αναλύσεων, όπως φαίνεται ξεκάθαρα από τους παραπάνω πίνακες. Στην πρώτη περίπτωση (μέθοδος άμεσης ολοκλήρωσης), το σχήμα αυτό μας οδήγησε σε ένα πολύ καλό τελικό αποτέλεσμα από άποψη βάρους (145.02) – πάντοτε σε σύγκριση με το σχήμα $(\mu+\lambda)ES$ - όμως ο απαιτούμενος χρόνος ήταν υπερβολικά μεγάλος (11h, 1 min). Αντίθετα, στη δεύτερη περίπτωση (μέθοδος των ιδιομορφών), το σχήμα $(\mu, \lambda)ES$ οδήγησε σε χειρότερη λύση, απαιτώντας περίπου τον ίδιο υπολογιστικό χρόνο με το σχήμα $(\mu+\lambda)ES$.

Τα παραπάνω στοιχεία δεν είναι όπως φαίνεται ικανά για να μας οδηγήσουν στον σχηματισμό μίας ολοκληρωμένης άποψης σχετικά με τη συμπεριφορά, τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα του σχήματος $(\mu, \lambda)ES$ σε σχέση με το σχήμα $(\mu+\lambda)ES$. Το σχήμα $(\mu+\lambda)$, είναι πάντως γενικά αποδεκτό ότι συγκλίνει ταχύτερα και δίνει καλύτερα αποτελέσματα στις περισσότερες των περιπτώσεων. Στο σχήμα $(\mu, \lambda)ES$ ενέχεται σε μεγαλύτερο βαθμό ο παράγοντας της τυχαμιακότητας, με αποτέλεσμα η συμπεριφορά του να είναι κάποιες φορές απρόβλεπτη, γεγονός που καταδεικνύεται και από τα παραπάνω αποτελέσματα.

Μπορεί κανείς να παρατηρήσει, μελετώντας προσεκτικά τη συμπεριφορά του σχήματος $(\mu, \lambda)ES$, ότι ο λόγος των γενεών προς τις αναλύσεις πεπερασμένων στοιχείων για το σχήμα αυτό είναι σε κάθε περίπτωση αρκετά μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο λόγο για το σχήμα $(\mu+\lambda)ES$. Πράγματι, σύμφωνα με τις τιμές των παραπάνω πινάκων, για τις μεθόδους $(\mu+\lambda)$ των Στρατηγικών Εξέλιξης, ο λόγος αυτός έχει τιμή 3.5 – 4.0, ενώ για τις μεθόδους (μ, λ) ο λόγος αυτός έχει περίπου διπλάσια τιμή, 7.0 – 9.0. Αυτό είναι ένα γενικό φαινόμενο, το οποίο οφείλεται στο εξής γεγονός: Στην περίπτωση των $(\mu+\lambda)ES$, αν ένας ή περισσότεροι από τους απογόνους είναι μη εφικτοί, ο αλγόριθμος μπορεί να προχωρήσει στην επόμενη γενιά, χρησιμοποιώντας ως νέους γονείς κάποιους από τους γονείς της προηγούμενης γενιάς. Αντίθετα, στην περίπτωση των $(\mu, \lambda)ES$, οι προηγούμενοι γονείς “πεθαίνουν” και ο αλγόριθμος πρέπει πάση θυσία να βρει 5 εφικτούς απογόνους για να τους χρησιμοποιήσει ως νέους γονείς, προκειμένου να προχωρήσει στην επόμενη γενιά, με αποτέλεσμα να αναλώνεται έτσι σε περισσότερες αναλύσεις πεπερασμένων στοιχείων.

5.7.3 Διερεύνηση της επιρροής του αριθμού γονέων και απογόνων

Στην παράγραφο αυτή, εξετάζεται η συμπεριφορά των σχημάτων (μ+λ)ES, για τις δύο χρησιμοποιηθείσες μεθόδους δυναμικής επίλυσης, για διάφορες τιμές των παραμέτρων μ και λ , δηλαδή του αριθμού των γονέων και των απογόνων. Ως σημεία εκκίνησης της αναζήτησης επελέγησαν οι δυσμενέστερες τιμές του εφικτού πεδίου τιμών, για τις οποίες το βάρος της κατασκευής είναι 428.19, ενώ ο τελεστής μετάλλαξης επελέγη να δρα σε 4 από τις 10 μεταβλητές σχεδιασμού. Το κριτήριο τερματισμού της διαδικασίας είναι το κριτήριο i . Τα αποτελέσματα της διερεύνησης αυτής παρουσιάζονται συνοπτικά στους πίνακες 5.3α και 5.3β που ακολουθούν.

A. Μέθοδος άμεσης ολοκλήρωσης

Πίνακας 5.3α Συμπεριφορά των σχημάτων (μ+λ)ES για διάφορες τιμές των μ , λ (Μ.Α.Ο.).

Σχήμα ES	Βέλτιστη λύση (βάρος)	Χρόνος (sec)	Χρόνος (h, min)	Γενιές	Αναλύσεις Π. Σ.					
(3+3)	148.71	9839.10	2h, 44min	65	135					
(3+5)	158.01	11308.09	3h, 8min	35	113					
(5+3)	165.82	12816.89	3h, 34min	56	123					
(5+5)	162.57	13818.90	3h, 50min	40	142					
(5+10)	143.89	20574.77	5h, 43min	38	248					
(10+5)	141.99	29363.4	8h, 9min	78	306					
(10+10)	145.42	32130.25	8h, 55min	48	381					
Σχήμα ES	Βέλτιστη λύση (μεταβλητές σχεδιασμού)									
	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄	s ₅	s ₆	s ₇	s ₈	s ₉	s ₁₀
(3+3)	18	15	23	14	20	14	11	6	15	12
(3+5)	20	14	24	15	19	15	15	5	14	13
(5+3)	17	16	26	15	19	16	9	6	12	14
(5+5)	18	15	23	18	20	14	8	6	18	13
(5+10)	20	14	16	17	20	14	9	5	15	11
(10+5)	18	15	22	13	20	14	8	5	15	11
(10+10)	20	14	14	19	20	14	9	6	18	9

Β. Μέθοδος των ιδιομορφών**Πίνακας 5.3β** Συμπεριφορά των σχημάτων (μ+λ)ES για διάφορες τιμές των μ, λ (Μ.Ι.).

Σχήμα ES	Βέλτιστη λύση (βάρος)	Χρόνος (sec)	Χρόνος (h, min)	Γενιές	Αναλύσεις Π. Σ.					
(3+3)	208.02	3110.10	52min	37	82					
(3+5)	189.94	3527.80	59min	29	92					
(5+3)	186.33	9853.56	2h, 44min	129	299					
(5+5)	193.90	5674.25	1h, 35min	40	157					
(5+10)	200.72	4897.33	1h, 22min	18	130					
(10+5)	215.80	4154.00	1h, 9min	23	109					
(10+10)	190.95	8646.18	2h, 24min	29	235					
Σχήμα ES	Βέλτιστη λύση (μεταβλητές σχεδιασμού)									
	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₆	S ₇	S ₈	S ₉	S ₁₀
(3+3)	20	16	21	19	20	16	13	10	16	13
(3+5)	19	16	23	15	20	16	5	12	12	16
(5+3)	20	16	25	20	20	16	5	5	16	12
(5+5)	20	16	21	21	20	16	11	8	14	13
(5+10)	20	17	20	19	20	17	10	8	15	13
(10+5)	20	17	17	22	20	16	10	10	14	16
(10+10)	20	15	23	20	19	16	6	12	16	12

Παρατηρούμε ότι το σχήμα (5+5)ES, όπως και σχήματα κοντά σε αυτό, δίνει σε κάθε περίπτωση αρκετά καλά αποτελέσματα, τόσο από απόψεως βέλτιστης λύσης, όσο και από πλευράς συνολικού χρόνου επίλυσης. Επιβεβαιώνεται έτσι κατά κάποιον τρόπο ο εμπειρικός κανόνας σύμφωνα με τον οποίο το άθροισμα των γονέων και των απογόνων πρέπει να λαμβάνεται ίσο με το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού του προβλήματος. Τα ανώτερα σχήματα των ES με 10 γονείς ή/και απογόνους δίνουν σε κάποιες περιπτώσεις πολύ καλά αποτελέσματα από πλευράς βέλτιστης λύσης, καταναλώνουν όμως σαφώς πολύ περισσότερο υπολογιστικό χρόνο έως ότου συγκλίνουν.

5.7.4 Διερεύνηση της επιρροής του αρχικού σημείου αναζήτησης

Σκοπός της παραγράφου αυτής ήταν να εξεταστεί η συμπεριφορά του σχήματος (5+5)ES, για τις δύο χρησιμοποιηθείσες μεθόδους επίλυσης, για διάφορες τιμές των αρχικών σχεδιασμών – γονέων, δηλαδή για διάφορα σημεία έναρξης της αναζήτησης. Στις έως τώρα επιλύσεις, ως σημεία έναρξης της αναζήτησης επιλέγονταν οι δυσμενέστερες περίπου τιμές του εφικτού πεδίου τιμών. Συγκεκριμένα, οι μεταβλητές σχεδιασμού των αρχικών γονέων είχαν τιμές γύρω στο 20, το οποίο αποτελεί άνω όριο για τις περισσότερες μεταβλητές σχεδιασμού (βλ. πιν. 5.1). Στην παράγραφο αυτή, θελήσαμε να εξετάσουμε σχήματα των ES στα οποία οι μεταβλητές σχεδιασμού των αρχικών γονέων παίρνουν τιμές 5 (κάτω όριο), 10 και 15. Το κριτήριο τερματισμού της διαδικασίας είναι το κριτήριο i , ενώ ο τελεστής μετάλλαξης επελέγη να δρα σε 4 από τις 10 μεταβλητές σχεδιασμού. Η έκβαση της διερεύνησης αυτής, για λόγους που θα εξηγηθούν παρακάτω, δεν ήταν η αναμενόμενη, καθώς δεν κατέληξε σε ουσιαστικό αποτέλεσμα, αξίζει όμως να ασχοληθούμε μαζί της καθώς μας φανερώνει, όπως θα δούμε, κάποιο από τα στοιχεία του τρόπου με τον οποίον έχει προγραμματιστεί ο αλγόριθμος στον ηλεκτρονικό υπολογιστή. Τα αποτελέσματα της έρευνας παρουσιάζονται συνοπτικά στους πίνακες 5.4α και 5.4β που ακολουθούν. Ως σχεδιασμός “x” στα παρακάτω θα αναφέρεται ο σχεδιασμός εκείνος του οποίου όλες οι μεταβλητές έχουν τιμή x.

A. Μέθοδος άμεσης ολοκλήρωσης

Πίνακας 5.4α Συμπεριφορά του σχήματος (5+5)ES για διάφορες τιμές των αρχικών σχεδιασμών (Μ.Α.Ο.).

Αρχ. σχεδιασμοί	Βέλτιστη λύση (βάρος)	Χρόνος (sec)		Χρόνος (h, min)		Γενιές	Αναλύσεις Π. Σ.			
“20”	162.57	13818.90		3h, 50min		40	142			
“15”	178.70	9246.65		2h, 34min		35	128			
“10”	178.70	9319.25		2h, 35min		35	153			
“5”	178.70	9473.37		2h, 38min		35	178			
Αρχ. σχεδιασμοί	Βέλτιστη λύση (μεταβλητές σχεδιασμού)									
	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₆	S ₇	S ₈	S ₉	S ₁₀
“20”	18	15	23	18	20	14	8	6	18	13
“15”	19	15	19	17	16	17	17	6	14	15
“10”	19	15	19	17	16	17	17	6	14	15
“5”	19	15	19	17	16	17	17	6	14	15

Β. Μέθοδος των ιδιομορφών**Πίνακας 5.4β** Συμπεριφορά του σχήματος (5+5)ES για διάφορες τιμές των αρχικών σχεδιασμών (Μ.Ι.).

Αρχ. σχεδιασμοί	Βέλτιστη λύση (βάρος)	Χρόνος (sec)		Χρόνος (h, min)		Γενιές	Αναλύσεις Π. Σ.			
“20”	193.90	5674.25		1h, 35min		40	157			
“15”	190.26	7262.48		2h, 1min		46	196			
“10”	190.26	8291.26		2h, 18min		46	221			
“5”	190.26	9510.37		2h, 39min		46	246			
Αρχ. σχεδιασμοί	Βέλτιστη λύση (μεταβλητές σχεδιασμού)									
	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄	s ₅	s ₆	s ₇	s ₈	s ₉	s ₁₀
“20”	20	16	21	21	20	16	11	8	14	13
“15”	18	18	16	20	20	15	5	10	10	17
“10”	18	18	16	20	20	15	5	10	10	17
“5”	18	18	16	20	20	15	5	10	10	17

Παρατηρούμε ότι με εξαίρεση την περίπτωση “20”, οι τρεις άλλες περιπτώσεις έδωσαν την ίδια βέλτιστη λύση, στον ίδιο αριθμό γενεών, ενώ οι αναλύσεις πεπερασμένων στοιχείων για αυτές διαφέρουν και στις τρεις περιπτώσεις κατά 25. Το γεγονός αυτό, το οποίο δύσκολα μπορεί να το αποδώσει κανείς σε σύμπτωση, αρχικά μας ξένισε, στη συνέχεια αποδείχτηκε όμως ότι είναι πλήρως εξηγήσιμο και οφείλεται στον προγραμματισμό του αλγορίθμου στον ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Ο αλγόριθμος έχει προγραμματιστεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε αν μετά τον έλεγχο των περιορισμών του προβλήματος για τους αρχικούς σχεδιασμούς, κάποιος από αυτούς αποδειχτεί μη εφικτός, τότε προστίθεται σε κάθε μεταβλητή του σχεδιασμού αυτού μία μονάδα, ώστε να γίνει πιο “ισχυρός”. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι όλοι οι αρχικοί σχεδιασμοί να καταστούν εφικτοί.

Αυτό συνέβη όπως φαίνεται στις τρεις από τις τέσσερις παραπάνω περιπτώσεις. Οι σχεδιασμοί “5”, “10” και “15”, είναι και οι τρεις μη εφικτοί. Οι 5 σχεδιασμοί - γονείς “5” σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία “ισχυροποίησης”, δηλαδή πρόσθεσης μονάδων, καταλήγουν στον σχεδιασμό “10”, ύστερα από $5 \times 5 = 25$ “αποτυχημένες” αναλύσεις πεπερασμένων στοιχείων. Οι 5 σχεδιασμοί - γονείς “10” με τη σειρά τους, σύμφωνα με την ίδια διαδικασία, καταλήγουν στον σχεδιασμό “15”, ύστερα από άλλες $5 \times 5 = 25$ αναλύσεις πεπερασμένων στοιχείων. Ο πρώτος εφικτός σχεδιασμός της μορφής “x”, προκύπτει για $15 < x < 20$. Στον σχεδιασμό αυτόν καταλήγουν τελικά και οι τρεις από τους παραπάνω

σχεδιασμούς μέσω της διαδικασίας “ισχυροποίησης”, οπότε στη συνέχεια έχοντας ακριβώς τις ίδιες αρχικές συνθήκες, οι τρεις περιπτώσεις οδηγούν στην ίδια βέλτιστη λύση.

Η σύγκλιση προς την ίδια ακριβώς βέλτιστη λύση οφείλεται στο ότι οι “τυχαίες” διαφοροποιήσεις που πραγματοποιούνται κατά τη διάρκεια της διαδικασίας βελτιστοποίησης είναι στην πραγματικότητα ψευδοτυχαίες, με την έννοια ότι για τις ίδιες αρχικές παραμέτρους θα οδηγήσουν στο ίδιο τελικό αποτέλεσμα. Για να μην συμβαίνει αυτό, θα έπρεπε ο “σπόρος” ο οποίος χρησιμοποιείται για την παραγωγή των τυχαίων αριθμών (βλ. παρ. 2.3) να άλλαζε από ανάλυση σε ανάλυση, πράγμα που όμως δεν συνέβη στην περίπτωση μας.

5.7.5 Συμπεράσματα για τις αναλύσεις βελτιστοποίησης

Ένα από τα συμπεράσματα στο οποίο μπορούμε να καταλήξουμε με βεβαιότητα μελετώντας τα ποικίλα αποτελέσματα των προηγούμενων παραγράφων είναι το ότι ο βέλτιστος σχεδιασμός των κατασκευών είναι ένα μεγάλο και ιδιαίτερα δύσκολο αντικείμενο. Στις μεθόδους βελτιστοποίησης των Στρατηγικών Εξέλιξης, υπεισέρχεται ένα πλήθος παραμέτρων, οι τιμές των οποίων καθορίζουν στο μεγαλύτερο ποσοστό το τελικό αποτέλεσμα, τόσο από απόψεως βέλτιστης λύσης, όσο και από πλευράς υπολογιστικού χρόνου. Είναι δύσκολο να οριστούν γενικοί κανόνες σε τέτοια προβλήματα οι οποίοι να οδηγούν εκ του ασφαλούς στο καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα σε κάθε μεμονωμένη περίπτωση. Η επιλογή των παραμέτρων αυτών είναι επομένως σε μεγάλο βαθμό θέμα του εκάστοτε μηχανικού - σχεδιαστή, ο οποίος με δεδομένο το πρόβλημα, καλείται να επέμβει με τον τρόπο αυτόν στην εξελικτική πορεία της διαδικασίας, χρησιμοποιώντας την κρίση και την εμπειρία του.

Το “καθολικό” βέλτιστο, δηλαδή οι ελάχιστες τιμές που πήραμε για το βάρος της εξεταζόμενης κατασκευής για κάθε μία από τις μεθόδους δυναμικής ανάλυσης, αναγράφονται στον πίνακα 5.5 που ακολουθεί.

Πίνακας 5.5 “Καθολικό” ελάχιστο για κάθε μέθοδο δυναμικής ανάλυσης.

Μέθοδος	Βέλτιστη λύση										
	Βάρος	Μεταβλητές σχεδιασμού									
		S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₆	S ₇	S ₈	S ₉	S ₁₀
M. A. O.	139.71	20	14	25	11	20	14	5	5	15	11
M. I.	168.75	20	16	21	21	20	16	11	8	14	13

5.7.6 Σύγκριση των δύο μεθόδων δυναμικής ανάλυσης

Στις αναλύσεις βελτιστοποίησης που πραγματοποιήθηκαν, οι δυναμικές αναλύσεις οι απαραίτητες για τον έλεγχο των περιορισμών του προβλήματος βελτιστοποίησης έγιναν με δύο μεθόδους διαφορετικής φιλοσοφίας, τη μέθοδο της άμεσης ολοκλήρωσης και τη μέθοδο των ιδιομορφών. Οι δυναμικές αναλύσεις με τις δύο μεθόδους αυτές, βασίστηκαν στο ίδιο φάσμα απόκρισης, ώστε να υπάρχει ένα ενιαίο σύστημα αναφοράς και τα αποτελέσματα τους να είναι κατά κάποιον τρόπο συγκρίσιμα μεταξύ τους. Η σύγκριση δεν αναφέρεται πλέον σε επίπεδο ανάλυσης, αλλά σε επίπεδο βελτιστοποίησης, δηλαδή σε επίπεδο βάρους της κατασκευής.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα των αναλύσεων βελτιστοποίησης με τις δύο μεθόδους, τα οποία παρουσιάστηκαν σε προηγούμενες παραγράφους, η μέθοδος των ιδιομορφών οδηγεί σε κάθε περίπτωση σε μεγαλύτερο βάρος της κατασκευής από ότι η μέθοδος της άμεσης ολοκλήρωσης. Η διαφορά των προκύπτοντων βαρών για τις δύο μεθόδους, για κάθε μία από τις αναλύσεις βελτιστοποίησης που προηγήθηκαν, παρουσιάζεται στον πίνακα 5.6 που ακολουθεί.

Πίνακας 5.6 Βέλτιστη λύση για κάθε μέθοδο ανάλυσης, για το σύνολο των αναλύσεων βελτιστοποίησης.

	Βάρος (M.A.O.)	Βάρος (M.I.)	Διαφορά %
Κριτήρια σύγκλισης			
i	162.57	193.90	19.3
ii	141.65	171.44	21.0
iii	139.71	168.75	20.8
iv	139.71	168.75	20.8
Στρατηγικές (μ+λ), (μ, λ)			
(μ+λ)	162.57	193.90	19.3
(μ, λ)	145.02	226.63	56.3
Διάφορα σχήματα ES			
(3+3)	148.71	208.02	39.9
(3+5)	158.01	189.94	20.2
(5+3)	165.82	186.33	12.4
(5+5)	162.57	193.90	19.3
(5+10)	143.89	200.72	39.5
(10+5)	141.99	215.80	52.0
(10+10)	145.42	190.95	31.3
“Καθολικό” ελάχιστο	139.71	168.75	20.8

Η διαφορά στις τιμές των βαρών σύμφωνα με τις τιμές του παραπάνω πίνακα είναι γενικά της τάξεως του 20% με την εξαίρεση κάποιων μεμονωμένων περιπτώσεων στις οποίες οι μεγάλες διαφοροποιήσεις πιθανότατα οφείλονται σε πρόωρη σύγκλιση κάποιας συγκεκριμένης μεθόδου. Η διαφορά που προκύπτει για το “καθολικό” ελάχιστο είναι πιο αντιπροσωπευτική της συνολικής εικόνας και είναι επίσης της τάξεως του 20%, και συγκεκριμένα 20.8%.

Αν δεχτούμε ότι τα αποτελέσματα της μεθόδου άμεσης ολοκλήρωσης είναι τα ακριβή, τότε προκύπτει το συμπέρασμα ότι η μέθοδος των ιδιομορφών οδηγεί σε υπερδιαστασιολόγηση της κατασκευής. Αντίστροφα, υποθέτοντας ότι τα αποτελέσματα της μεθόδου των ιδιομορφών είναι ακριβή, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μέθοδος της άμεσης ολοκλήρωσης οδηγεί σε υποδιαστασιολόγηση της κατασκευής. Από τις δύο αυτές υποθέσεις η πρώτη δείχνει περισσότερο αληθοφανής. Στη μέθοδο των ιδιομορφών, όπως την περιγράφουν οι κανονισμοί, υπεισέρχονται πολλές απλοποιητικές παραδοχές, όπως λόγω χάρη ο υπολογισμός της ολικής απόκρισης ως τετραγωνική ρίζα των επιμέρους ιδιομορφικών αποκρίσεων, οι οποίες οδηγούν εν γένει σε συντηρητικότερους σχεδιασμούς, καθώς έχει επιλεγεί να δρουν υπέρ της ασφαλείας. Αντίθετα η μέθοδος της άμεσης ολοκλήρωσης εμπεριέχει λιγότερες απλοποιητικές παραδοχές και είναι γενικά περισσότερο ακριβής, καθώς τα όποια σφάλματά της εξαρτώνται από την επιλογή των παραμέτρων της μεθόδου και είναι επομένως ελεγχόμενα σε μεγαλύτερο βαθμό.

Βιβλιογραφία - Βιβλιογραφικές παραπομπές

▪ Ελληνική

1. Αναγνωστόπουλος, Σ. Α., Δρ. Πολ. Μηχ., “Στοιχεία αντισεισμικής δυναμικής ανάλυσης κατασκευών με φάσματα απόκρισης”.
2. Ελληνική Εταιρία Θεωρητικής και Εφαρμοσμένης Μηχανικής (Ε.Ε.Θ.Ε.Μ.), “Δυναμική συμπεριφορά των κατασκευών”, Πλαίσιο εκδοτική εταιρία.
3. Κατσιαδέλης, Ι. Θ., “Δυναμική ανάλυση πολυώροφων κτιρίων (Τόμος ΙΙ)”, Αθήνα 1990.
4. Κατσιαδέλης, Ι. Θ., “Μαθήματα δυναμικής αναλύσεως ραβδωτών φορέων (Στατική ΙV)”, Αθήνα 1991.
5. Κοκκοσαλάκης, Γ., “Βέλτιστος σχεδιασμός κατασκευών με εξελικτικούς αλγορίθμους”, Διπλωματική εργασία, Επιβλέπων: Μ. Παπαδρακάκης, ΕΜΠ, Αθήνα, Ιούλιος 1998.
6. Κοκολάκης, Γ., Σπηλιώτης, Ι., “Εισαγωγή στη θεωρία πιθανοτήτων και στατιστική”, Εκδόσεις Συμεών, 1991.
7. Λαγαρός, Ν., “Συνδυαστικές τεχνικές για τον βέλτιστο σχεδιασμό των κατασκευών”, Διδακτορική διατριβή, Επιβλέπων: Μ. Παπαδρακάκης, ΕΜΠ, Αθήνα, Ιούνιος 1999.
8. Μουζάκης, Χ. Π., Πολ. Μηχανικός Ε.Δ.Τ.Π. Ε.Μ.Π., “Δυναμικός αντισεισμικός υπολογισμός μονώροφου και δώροφου κτιρίων, Ασκήσεις”, Αθήνα, Οκτώβριος 1998.
9. Οργανισμός Αντισεισμικού Ελέγχου και Προστασίας (Ο.Α.Σ.Π.), “Νέος Ελληνικός Αντισεισμικός Κανονισμός (Ν.Ε.Α.Κ.)”, 1995.
10. Τσομπανάκης, Ι. Ε., “Βέλτιστος σχεδιασμός κατασκευών μεγάλης κλίμακας σε σειριακό και παράλληλο υπολογιστικό περιβάλλον”, Διδακτορική διατριβή, Επιβλέπων: Μ. Παπαδρακάκης, ΕΜΠ, Αθήνα, Ιούνιος 1999.

▪ **Αγγλική**

11. Adeli, H. (ed.), “Advances in design optimization”, Chapman & Hall, 1994.
12. AISC – Manual of steel construction, 9th edn, American Institut of Steel Constructions, Chicago, IL, 1989.
13. Arora, J. S., “Introduction to optimum design”, McGraw-Hill International Editions, New York, 1989.
14. Arora, J. S., “Methods for optimization of large-scale systems”, in Papadrakakis, M. (ed.), “Solving Large-Scale Problems in Mechanics”, John Wiley, pp. 391-430, 1994.
15. Bathe, K. J., Wilson, E. L., “Numerical methods in finite element analysis”, Prentice Hall, 1976.
16. Cai, J., Thierauf, G., “Discrete optimization of structures under dynamic loading by using sequential and parallel evolution strategies”, Doctoral Dissertation, Department of Civil Engineering, University of Essen, Germany, 1995.
17. Chopra, A. K., “Dynamics of structures, Theory and applications to earthquake engineering”, Prentice Hall, 1995.
18. Clough, R. W., Penzien J., “Dynamics of structures”, McGraw-Hill, 1975.
19. Gasparini, D. A. and Vanmarke, E. H., “Simulated earthquake motions compatible with prescribed response spectra”, Massachusetts Institute of Technology (MIT), Department of Civil Engineering, Publication No. R76-4, January 1976.
20. Gasparini, D. A., “SIMQKE - A program for artificial motion generation, User’s manual and documentation”, Massachusetts Institute of Technology (MIT), Department of Civil Engineering, November 1976.
21. Gill, P. E., Murray, W., and Wright, M. H., “Practical Optimization”, Academic Press, 1981.
22. Haug, E. J., Arora, J. S., “Applied optimal design, Mechanical and Structural Systems”, John Wiley and Sons, 1979.
23. Pierre, D. A., “Optimization theory with applications”, Dover Publications, 1986

24. Polak, E., Pister, K. S., Ray, D., “Optimal design of framed structures subjected to earthquakes”, Gordon and Breach Science Publishers Ltd., 1976.
25. Schwefel, H.-P., “Evolution and optimum seeking”, John Wiley and Sons, 1995
26. Taylor, C. A., “EQSIM, A program for generating spectrum compatible earthquake ground acceleration time histories, Reference Manual”, Bristol Earthquake Engineering Data Acquisition and Processing System, December 1989.
27. Vanderplaats, G. N., “Numerical optimization techniques for engineering design”, McGraw-Hill International Editions, New York, 1984.